ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение…….5

Глава 1. ……... ……..…….7

1.1 История предприятия…….……..7

1.2 Математическое моделирование…… …..10

1.3 Понятие сплошной среды……..14

1.4 Законы механики сплошной……..15

1.5 Гидростатика. Равновесие жидкостей и газов…….25

1.6 OMaple……29

1.7 Динамика течений реки Кянда……..31

1.8 Решение задачи……...35

Заключение……...….38

Список использованных источников…….…….....42

Приложение А...……....41

Приложение В……...54

ВВЕДЕНИЕ

Выдающийся итальянский физик и астроном, один из основателей точного естествознания, Галилео Галилейговорил, что "Книга природы написана на языке математики". Почти через двести лет родоначальник немецкой классической философии Иммануил Кант утверждал, что "Во всякой науке столько истины, сколько в ней математики". Наконец, ещё через почти сто пятьдесят лет, практически уже в наше время, немецкий математик и логик Давид Гильберт констатировал: "Математика - основа всего точного естествознания".

Приведенные высказывания великих ученых, без дополнительных комментариев, дают полное представление о роли и значении математики как в научно-теоретической, так и предметно-практической деятельности специалистов.

Как нам известно математика- это наука о структурах, порядке и отношениях, которая исторически сложилась на основе операций подсчёта, измерения и описания форм объектов.

В данной работе сделано математическое моделирование несжимаемой жидкости. Математическое моделирование – это процесс построения и изучения математических моделей реальных процессов и явлений. Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют реальный объект его моделью и затем изучают последнюю. Как и в случаи любого моделирования, математическая модель не описывает полностью изучаемое явление и вопросы о применимости полученных таким образом результатов являются весьма содержательными.

Несжимаемая жидкость- это математическая модель сплошной среды, плотность которой сохраняется при изменении давления.

В качестве примера рассмотрены результаты исследований Северо-западного Отделения Института океанологииим. П.П.Ширшова РАН в городе Архангельск на примере реки Кянда.

Кянда – река бассейна Белого моря, протекает в Онежском районе Архангельской области. Исток реки Кянда – верховое болото, расположенное на западе от озера Солозера, являющегося истоком реки Солза. Длина реки

Кяндаравна 49 км. Общее падение реки Кяндасоставляет 125 м, уклон – 2,551%. Впадает в Онежскую губу Белого моря.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1.1 История предприятия

Северо-западное Отделение Института океанологииим. П.П.Ширшова РАН (СЗО ИОРАН) создано в 2001 году на базе Архангельской научно-экспедиционной станции (АрхНЭС), которая в 1997 году была организована из Архангельской научно-организационной группы, созданной в 1994 году. Руководителем этих подразделений ИОРАН до 2002 года был доктор технических наук Б.Ф. Кельбалиханов, с 2002 по 2006 гг. Руководителем Отделения был кандидат технических наук В.А.Матюшенко, а с 2006 по 2009г. Руководил Отделением кандидат географических наук Л.Э.Скибинский.

Директор Северо-Западного отделения ИОРАН - д.г.н. Коробов Владимир Борисович.

Отделение выполняет плановые фундаментальные научно-исследовательские работы (ФНИР) и прикладные научные исследования по хоздоговорам и контрактам с различными государственными и коммерческими организациями. В период 2003-2005 гг. Отделением выполнена ФНИР: «Исследование физических механизмов формирования циркуляции вод Белого моря методами численного моделирования». Разработана и апробирована численная гидродинамическая модель течений вод Белого моря с учетом рельефа дна, приливов и стоков крупных рек. Указанная модель позволяет оценивать приливно-отливную изменчивость температуры, солености и уровня поверхности моря.

Для исследования распространения примесей в морской воде был разработан блок, учитывающий, кроме перемещения пассивной примеси течениями, включая наличие на поверхности моря нефтепродуктов, еще и гравитационное оседание примеси. (автор - к.ф-м.н. Лунева М.В.). Проведен анализ существующих моделей оценки качества вод и. предложена регрессионная модель качества морской воды для устьев рек различного морфометрического типа для приливных арктических морей (автор - к.г.н. Скибинский Л.Э.). В настоящее время Отделением выполняется плановая ФНИР: «Комплексные исследования фронтальных зон

прибрежных акваторий и устьев рек Белого, Баренцева и Карского морей». (Научный руководитель к.г.н. Л.Э.Скибинский, ответственный исполнитель к.т.н. В.А.Матюшенко).

Разработаны и используются гидрооптические приборы для оценки качества морской воды спектральными дистанционными и insitu оптическими методами в видимом диапазоне излучения с высоким спектральным разрешением менее одного нанометра, в основу которых положена нанотехнология. Получены спектры показателя ослабления света морской воды и коэффициента яркости моря для вод Мирового океана различного генезиса (авторы В.А.Матюшенко, Б.Ф.Кельбалиханов - Спектрофотометр. А.с. СССР №1055973А 1983).

ИОРАН сегодня - это коллектив из 1215 сотрудников, среди которых 105 докторов наук и 261 кандидат наук разных специальностей. Сейчас в институте работают 2 действительных члена РАН, 4 члена-корреспондента РАН. Институт имеет в своём составе Атлантическое отделение (г. Калининград),Южное отделение (г. Геленджик), филиал в Санкт-Петербурге, Северо-Западное отделение (г. Архангельск), Каспийский филиал (г. Астрахань)

В 2010 году Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН работал по плану, утвержденному вице-президентом РАН - академиком Лавёровым Н.П., включающему 6 проектов по целевому финансированию Президиума РАН, 4 проекта ФЦП «Мировой океан», 7 проектов ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», 3 темы по программе фундаментальных исследований ОНЗ РАН и 83 темы - за счет базового бюджетного финансирования. Кроме того, сотрудники ИОРАН выполняли исследования в рамках 11 долговременных международных программ и проектов различных зарубежных научных и правительственных организаций, получали 117 грантов РФФИ , в том числе 2 гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ и 3 гранта Президента РФ для поддержки молодых российских учёных - кандидатов наук. 15 тем разрабатывались на основе соглашений с российскими заказчиками.

В 2010 году Институт провел 12 экспедиций общей продолжительностью 502 суток. В рейсах приняли участие 318 научных сотрудников и специалистов, которые представляли 25 организаций семи министерств и ведомств России и

иностранные участники из США, Канады, Швейцарии, Турции, Германии, Франции, Аргентины, Чили, Китая, Британских заморских территорий (Бермуды), Израиля, Вьетнама, Польши, Украины.

Вся экспедиционная деятельность Института была направлена на реализацию положений Морской доктрины Российской Федерации на период до 2020 года (утверждена Президентом Российской Федерации 27 июля 2001 года № Пр -1387). По сравнению с прошлым годом произошло уменьшение продолжительности научных рейсов на 142 судосуток. Общий объём финансирования на проведение научных рейсов уменьшился на 64,85 млн. руб. Финансирование РАН уменьшилось в два раза в абсолютных величинах и в процентах с 11% до 8%. Финансирование РФФИ также уменьшилось примерно в 1,5 раза. В наибольшей степени падение финансирования экспедиционной деятельности коснулось хоздоговорной деятельности. В процентном отношении произошло уменьшение доли финансирования экспедиций из хоздоговорных источников с 53% до 34%. Падение доходов от хоздоговорной деятельности связано с сокращением в период кризиса заказов со стороны российских компаний на работу в прибрежных морях России.

Успешная научная экспедиционная деятельность судов основана на сочетании коммерческой и научной деятельности. Наличие фрахтов создает финансовую основу проекта. Фрахтователи оплачивают ремонты, содержание, снабжение судов, зарплату и питание экипажей практически на протяжении всего года. Кроме того, они оплачивают переходы судна к месту проведения научных работ и обратно. Помимо проекта «Меридиан-плюс» ФЦП «Мировой океан» Институт продолжал активную экспедиционную деятельность на хоздоговорной основе.

В 2010 году сотрудники ИОРАН опубликовали монографий и сборников - 10 (из них 4 - на иностранном языке). В журналах опубликовано 615 научных статей, в т.ч. 443 - на русском языке. 117 сотрудников Института океанологии приняли участие в 54 международных конференциях и симпозиумах по отдельным направлениям океанологии и в многодисциплинарных встречах специалистов, проходивших за рубежом. Кроме того, более 300 сотрудников Института участвовали в международных конференциях и совещаниях на территории РФ, в

том числе в 5-ти международных встречах, главным или одним из главных организаторов которых был Институт океанологии. Институтом подготовлено и реализовано на практике 22 разработки.

Разработаны:

– «Способ определения и построения пространственного распределения океанографических характеристик и система для его реализации», Патент РФ №2156958 (авторы В.А.Матюшенко и др.);

– «Способ измерения оптических характеристик мутных сред», Патент РФ №218561. (автор В.А.Матюшенко);

– «Двулучевой фотометр», Патент РФ №2169360 (автор В.А.Матюшенко);

– «Способ ослабления тропических циклонов (ураганов, тайфунов), Патент РФ № 2150134 (авторы В.А.Матюшенко, В.Н.Пелевин);

– система обнаружения и оценки уровня загрязнения нефтепродуктами морской поверхности (авторы В.А.Матюшенко, И.Е.Ушаков - Патенты РФ № 2018874, №2018875).

Отделение принимает участие в выполнении НИР по международной программе: «ЛОИРА», а также по программе: «Система Белого моря» (рук. - академик РАН А.П.Лисицын). Отделение имеет оснащенную современными приборами и оборудованием гидробиохимическую лабораторию и научно-исследовательское судно «Акванавт-2».

1.2 Математическое моделирование

Модель в широком смысле - это любой образ, аналог мысленный или установленный изображение, описание, схема, чертеж, карта и т. п. какого-либо объема, процесса или явления, используемый в качестве его заменителя или представителя. Сам объект, процесс или явление называется оригиналом данной модели.

Моделирование - это исследование какого- либо объекта или системы объектов путем построения и изучения их моделей. Это использование моделей

для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов.

На идее моделирования базируется любой метод научного исследования, при этом, в теоретических методах используются различного рода знаковые, абстрактные модели, в экспериментальных - предметные модели.

При исследовании сложное реальное явление заменяется некоторой упрощенной копией или схемой, иногда такая копия служит лишь только для того чтобы запомнить и при следующей встрече узнать нужное явление. Иногда построенная схема отражает какие - то существенные черты, позволяет разобраться в механизме явления, дает возможность предсказать его изменение. Одному и тому же явлению могут соответствовать разные модели.

Задача исследователя - предсказывать характер явления и ход процесса.

Иногда, бывает, что объект доступен, но эксперименты с ним дорогостоящи или привести к серьезным экологическим последствиям. Знания о таких процессах получают с помощью моделей.

Важный момент - сам характер науки предполагает изучение не одного конкретного явления, а широкого класса родственных явлений. Предполагает необходимость формулировки каких - то общих категорических утверждений, которые называются законами. Естественно, что при такой формулировке многими подробностями пренебрегают. Чтобы более четко выявить закономерность сознательно идут на огрубление, идеализацию, схематичность, то есть изучают не само явление, а более или менее точную ее копию или модель. Все законы- это законы о моделях, а поэтому нет ничего удивительного в том, что с течением времени некоторые научные теории признаются непригодными. Это не приводит к краху науки, поскольку одна модель заменилась другой более современной.

Особую роль в науке играют математические модели, строительный материал и инструменты этих моделей - математические понятия. Они накапливались и совершенствовались в течении тысячелетий. Современная математика дает исключительно мощные и универсальные средства исследования. Практически каждое понятие в математике, каждый математический объект, начиная от понятия числа, является математической моделью. При построении математической модели, изучаемого объекта или явления выделяют те его

особенности, черты и детали, которые с одной стороны содержат более или менее полную информацию об объекте, а с другой допускают математическую формализацию. Математическая формализация означает, что особенностям и деталям объекта можно поставить в соответствие подходящие адекватные математические понятия: числа, функции, матрицы и так далее. Тогда связи и отношения, обнаруженные и предполагаемые в изучаемом объекте между отдельными его деталями и составными частями можно записать с помощью математических отношений: равенств, неравенств, уравнений. В результате получается математическое описание изучаемого процесса или явление, то есть его математическая модель.

Изучение математической модели всегда связанно с некоторыми правилами действия над изучаемыми объектами. Эти правила отражают связи между причинами и следствиями.

Построение математической модели - это центральный этап исследования или проектирования любой системы. От качества модели зависит весь последующий анализ объекта. Построение модели - это процедура не формальная. Сильно зависит от исследователя, его опыта и вкуса, всегда опирается на определенный опытный материал. Модель должна быть достаточно точной, адекватной и должна быть удобна для использования.

К требованиям, предъявляемым к моделям относятся:

1) Универсальность – характеризует полноту отображения моделью изучаемых свойств объекта.

2) Адекватность – способность отражать нужные свойства объекта с погрешностью не выше заданной.

3) Точность – оценивается степенью совпадения значений характеристик реального объекта и значения этих характеристик полученных с помощью моделей.

4) Экономичность- определяется затратами ресурсов ЭВМ памяти и времени на ее реализацию и эксплуатацию.

Основными этапами моделирования являются следующее:

1) Постановка задачи.

Определение цели анализа и пути ее достижения и выработки общего подхода к исследуемой проблеме. На этом этапе требуется глубокое понимание существа поставленной задачи. Иногда, правильно поставить задачу не менее сложно чем ее решить. Постановка - процесс не формальный, общих правил нет.

2) Изучение теоретических основ и сбор информации об объекте оригинала.

На этом этапе подбирается или разрабатывается подходящая теория. Если ее нет, устанавливаются причинно - следственные связи между переменными описывающими объект. Определяются входные и выходные данные, принимаются упрощающие предположения.

3) Формализация.

Заключается в выборе системы условных обозначений и с их помощью записывать отношения между составляющими объекта в виде математических выражений. Устанавливается класс задач, к которым может быть отнесена полученная математическая модель объекта. Значения некоторых параметров на этом этапе еще могут быть не конкретизированы.

4)Выбор метода решения.

На этом этапе устанавливаются окончательные параметры моделей с учетом условия функционирования объекта. Для полученной математической задачи выбирается какой- либо метод решения или разрабатывается специальный метод. При выборе метода учитываются знания пользователя, его предпочтения, а также предпочтения разработчика.

5) Реализация модели.

Разработав алгоритм, пишется программа, которая отлаживается, тестируется и получается решение нужной задачи.

6) Анализ полученной информации.

Сопоставляется полученное и предполагаемое решение, проводится контроль погрешности моделирования.

7) Проверка адекватности реальному объекту.

Результаты, полученные по модели сопоставляются либо с имеющейся об объекте информацией или проводится эксперимент и его результаты сопоставляются с расчётными.

Процесс моделирования является итеративным. В случае неудовлетворительных результатов этапов 6. или 7. осуществляется возврат к одному из ранних этапов, который мог привести к разработке неудачной модели. Этот этап и все последующие уточняются и такое уточнение модели происходит до тех пор, пока не будут получены приемлемые результаты.

1.3 Понятие сплошной среды

Механика сплошной среды, раздел механики, посвященный изучению движения и равновесия газов, жидкостей и деформируемых твёрдых тел. К Механика сплошной среды относятся: гидроаэромеханика, газовая динамика, упругости теория, пластичности теория и др. Основное допущение Механика сплошной среды состоит в том, что вещество можно рассматривать как непрерывную, сплошную среду, пренебрегая его молекулярным (атомным) строением, и одновременно считать непрерывным распределение в среде всех её характеристик (плотности, напряжений, скоростей частиц и др.). Это оправдывается тем, что размеры молекул ничтожно малы по сравнению с размерами частиц, которые рассматриваются при теоретических и экспериментальных исследованиях в Механика сплошной среды Поэтому можно применить в Механика сплошной среды хорошо разработанный для непрерывных функций аппарат высшей математики.

Исходными в Механика сплошной среды при изучении любой среды являются:

– уравнения движения или равновесия среды, получаемые как следствие основных законов механики;

– уравнение неразрывности (сплошности) среды, являющееся следствием закона сохранения массы;

– уравнение энергии.

Особенности каждой конкретной среды учитываются уравнением состояния или реологическим уравнением, устанавливающим для данной среды вид зависимости между напряжениями или скоростями изменения напряжений и деформациями или скоростями деформаций частиц. Характеристики среды могут также зависеть от температуры и др. физико-химических параметров; вид таких зависимостей должен устанавливаться дополнительно. Кроме того, при решении каждой конкретной задачи должны задаваться начальные и граничные условия, вид которых тоже зависит от особенностей среды.

Механика сплошной среды находит огромное число важных приложений в различных областях физики и техники.

1.4 Законы механики сплошной среды

Механика сплошной среды основывается на трёх главных законах:

1) Сохранение массы (сохранение импульса)

Импульсом материальной точки называется произведение массы точки на ее скорость. Импульсом системы материальных точек называется векторная сумма импульсов отдельных точек. Любое макроскопическое тело или несколько макроскопических тел можно рассматривать как систему материальных точек, поскольку каждое тело можно мысленно разбить на сколь угодно малые части и считать их материальными точками. В дальнейшем систему материальных точек для краткости будем называть просто системой.

Из законов Ньютона следует, что в инерциальной системе отсчета справедливо векторное равенство

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} \qquad (1)$$

$\vec{F}$

где — сумма всех внешних сил, действующих на систему в течение сколь

$\Delta\vec{p}$

угодно малого интервала времени Δt (Δt> 0), а — изменение импульса системы

за это время. Произведение называется импульсом силы. Обратите внимание, что

$\vec{F}$

— это сумма только внешних сил, т.е. сил, действующих на тела системы со

стороны тел, не входящих в систему. Внутренние силы, т.е. силы взаимодействия между частями системы, в равенство (1) не входят.

$\vec{F} = 0$

Если в течение времени Δt (Δt> 0) сумма внешних сил равна нулю, т.е.

$\Delta\vec{p} = 0$

, то и, т.е. импульс системы в течение Δt сохраняется. Когда время

взаимодействия тел системы (время опыта) не мало, его можно разбить на сколь

$\Delta t = \sum \Delta t_k$

угодно малые интервалы: , где k = 1, 2, 3 ... Если в течение каждого

такого интервала сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы будет сохраняться в течение этого интервала и, как следствие, в течение всего времени опыта. Напомним, что замкнутой (изолированной) системой называется система, тела которой не взаимодействуют с другими телами (внешним миром). Ясно, что

$\vec{F} = 0 \quad \Delta\vec{p} = const$

для замкнутой системы и .

Итак, в инерциальной системе отсчета импульс системы материальных точек сохраняется в течение некоторого времени Δt (не обязательно малого) в двух случаях:

1) система в течение Δt замкнута (изолирована);

2) система не замкнута, т.е. внешние силы есть, но их сумма равна нулю в течение всего времени Δt.

Это утверждение и представляет собой закон сохранения импульса в развернутой формулировке.

Импульс системы — это вектор, и его сохранение в течение некоторого времени взаимодействия частей системы встречается не так часто, хотя бы потому, что в земных условиях строго замкнутой системы нет в принципе из-за наличия внешней силы — силы притяжения к Земле. Да и равенство нулю суммы всех внешних сил на протяжении некоторого интервала времени может реализоваться только при вполне определенных условиях. Гораздо чаще встречается случай, когда за время Δt векторная сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма их проекций на некоторую ось X в пространстве. Тогда в течение этого времени сохраняется проекция на ось X импульса системы. Действительно, запишем равенство (1) в проекциях на ось X:

$$F_x \cdot \Delta t = \Delta p_x \qquad (2)$$

где Fx — проекция на ось X суммы всех внешних сил (по правилам действия с векторами Fx равна сумме проекций на ось X всех внешних сил), а Δp_x — проекция на ось X изменения импульса системы $\Delta\vec{p}$ (по правилам действия с векторами Δp_x равна изменению проекции на ось X импульса системы).

Если в течение времени $\Delta t \to 0$ $F_x = 0$, то из равенства (2) следует, что $\Delta p_x = 0$ и $p_x = const$. Если же время Δt опыта не мало, то после разбиения его на сколь угодно малые интервалы легко показать, что при выполнении в течение произвольного Δt условия $F_x = 0$ будет иметь место следствие $p_x = const$.

Иными словами, в инерциальной системе отсчета проекция на некоторую ось X импульса системы материальных точек сохраняется в течение некоторого времени Δt (не обязательно малого), если сумма проекций на ось X всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю в течение этого времени Δt.

На основании этого утверждения о сохранении проекции импульса и решается большинство задач. При этом часто запись уравнения, отражающего сохранение проекции импульса в виде равенства начальной и конечной проекций импульса, обосновывается фразой «по закону сохранения импульса», что не совсем точно. Но поскольку эта неточность не влияет на результат при решении задачи, на нее, как правило, никто не обращает внимания, в том числе и экзаменаторы.

Скажем несколько слов о приближенном сохранении импульса или его проекции. Равенство (1) тем точнее, чем меньше Δt. Конечное время опыта Δt можно разбить на сколь угодно малые интервалы времени Δt_k и записать для каждого из них равенство

$$\vec{F}_k \cdot \Delta t_k = \Delta \vec{p}_k.$$

Сложив все такие равенства, получим новое, внешне похожее на (1):

$$\vec{F}_{\text{ср}} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}, \quad (3)$$

где $\vec{F}_{\text{ср}}$ — некоторая средняя внешняя сила, действующая в течение Δt и определяемая из равенства $\vec{F}_{\text{ср}} \cdot \Delta t = \sum \vec{F}_k \cdot \Delta t_k$,

$\Delta \vec{p} = \sum \Delta \vec{p}_k$ — изменение импульса системы за конечное время Δt.

Аналогично получается и внешне похожее на (2) равенство в проекциях:

$$F_{x\,\text{ср}} \cdot \Delta t = \Delta p_x, \quad (4)$$

$F_{x\ \text{ср}}$ где — некоторое среднее значение суммы проекций на ось X всех внешних сил в течение конечного времени опыта Δt,

Δp_x — изменение проекции на ось X импульса системы за это время.

Ясно, что при $\overrightarrow{F_{\text{ср}}} = 0$ (например, $\vec{F} = 0$ в любой момент опыта) из равенства (3) следует $\Delta \vec{p} = 0$ и $\vec{p} = const$. При $\overrightarrow{F_{x\ \text{ср}}} = 0$ из равенства (4) следует $p_x = const$.

$\overrightarrow{F_{ср}} = 0$ $\overrightarrow{F_{x\ ср}} = 0$

Если же в течение времени опыта не выполняется строго или , то за

«помощью» в решении задачи следует обращаться к равенствам (3) и (4) и

$F_{x\ ср} \cdot \Delta t$ $F_{ср} \cdot t$

анализировать их. Иногда можно считать, что величины или ,

$\vec{p} \approx const$

характеризующие импульс силы, малы. Тогда из (3) или (4) следует, что

$\overrightarrow{p_x} \approx const$

или . Такая ситуация встречается при некоторых взаимодействиях тел

$F_{ср}$ $F_{x\ ср}$

системы — таких, как удары, когда Δt мало, а или ср ограничены из-за

F_x

ограниченности значений F или в течение опыта.

2) Сохранение энергии

В гидродинамике идеальной жидкости закон сохранения энергии традиционно формулируется в виде уравнения Бернулли: вдоль линий тока остаётся постоянной сумма:

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const}$$

где v — скорость потока жидкости,

w — тепловая функция жидкости,

g — ускорение свободного падения,

z — координата точки в направлении силы тяжести.

Если внутренняя энергия жидкости не меняется, то уравнение Бернулли может быть переписано в виде:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + gz = \mathrm{const}$$

где p — давление жидкости,

$\rho(p)$ — плотность жидкости.

Для несжимаемой жидкости плотность является постоянной величиной, поэтому в последнем уравнении может быть выполнено интегрирование:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \mathrm{const}$$

3) Второй закон Ньютона (изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует).

Но, в отличие от механики материальной точки, в законе сохранения энергии учитывается помимо потенциальной и кинетической ещё и внутренняя энергия, а в законе изменения импульса кроме «обычных» объёмных сил – тяжести, электромагнитных и инерционных – на вещество действуют дополнительно и поверхностные силы (поверхностные напряжения). В случае гидроаэромеханики примером поверхностной силы является давление – нормальное напряжение.

Давление p в газе и жидкости создаётся за счёт хаотических столкновений молекул и связано с другими параметрами состояния вещества, например, температурой T и плотностью *p* – уравнением состояния. Для идеального газа таким уравнением состояния является уравнение Клапейрона – Менделеева:

P = *p*RTM

где R – газовая постоянная,

M – молярная масса.

Для жидкости, учитывая её малую сжимаемость, вместо этого соотношения обычно используется условие несжимаемости, которое существенно упрощает уравнение аэромеханики:

p = const.

Внутренняя энергия ***u*** также определяется уравнением состояния. В небольшом диапазоне температур можно считать, что внутренняя энергия 1 моля вещества линейно зависит от температуры:

$U = c_v T$

где c_v – молярная теплоёмкость вещества при постоянном объёме.

Закон сохранения импульса.

Из законов Ньютона можно показать, что при движении в пустом пространстве импульс сохраняется во времени, а при наличии взаимодействия скорость его изменения определяется суммой приложенных сил. В классической механике закон сохранения импульса обычно выводится как следствие законов Ньютона. Однако, этот закон сохранения верен и в случаях, когда Ньютоновскаямеханика неприменима (релятивистская физика, квантовая механика). Как отмечалось, он может быть получен как следствие интуитивно-верного утверждения о том, что свойства нашего мира не изменятся, если все его объекты (или начало отсчета!) переместить на некоторый вектор L. В настоящее время не существует каких-либо экспериментальных фактов, свидетельствующих о невыполнении закона сохранения импульса.

Закон сохранения момента импульса.

Если понятие импульса в классической механике характеризует поступательное движение тел, момент импульса вводится для характеристики вращения и является следствием утверждения о том, что свойства окружающего мира не изменяются при поворотах (или повороте системы отсчета) в пространстве.

В случае неравенства нулю момента силы наблюдается весьма "необычное" с точки зрения "здравого смысла" поведение быстро вращающихся тел (их момент импульса направлен по оси вращения) с помещенной на острие осью вращения. Такие тела под действием внешних сил (например, силы тяжести) вместо того, чтобы перемещаться в сторону действия силы, начинают медленно вращаться вокруг острия в перпендикулярной приложенной силе плоскости. Несмотря на то, что подобное поведение является непосредственным следствием законов Ньютона (или еще более общих законов сохранения и симметрии), этот эффект часто не только вызывает удивление у лиц, мало знакомых с точными науками, но и дает им повод рассуждать об "ошибочности современного естествознания вообще и классической физики в частности. Основанный на принципе "...если я не понимаю теории или наблюдаемого эффекта, то тем хуже для них...", к сожалению до сих пор все еще популярен, хотя уже на протяжении нескольких столетий развивающееся естествознание демонстрирует его весьма низкую эвристическую эффективность.

Закон сохранения энергии.

Первоначально в механике были введены кинетическая энергия (обусловленная движением тела) и потенциальная (обусловленная взаимодействиями между телами и зависящая от их расположения в пространстве). Конкретное математическое выражение для потенциальной энергии определяется взаимодействиями между объектами. В большинстве механических систем механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) сохраняется во времени (например в случае мяча, упруго ударяющегося о пол). Однако нередки и такие системы, в которых механическая энергия изменяется (чаще всего убывает). Для описания этого были введены диссипативные силы (например силы вязкого и

сухого трения и др.). Со временем выяснилось, что диссипативные силы описывают не исчезновение или возникновение механической энергии, а переходы ее в другие формы (тепловую, электромагнитную, энергию связи и т.д.). История развития естествознания знает несколько примеров того, как кажущееся нарушение закона сохранения энергии стимулировало поиск ранее неизвестных каналов ее преобразования, что в результате приводило к открытию ее новых форм (так, например, "безвозвратная" потеря энергии в некоторых реакциях с участием элементарных частиц послужила указанием на существование еще одной неизвестной ранее элементарной частицы, впоследствии получившей название нейтрино).

Закон сохранения энергии имеет большое практическое значение, поскольку существенно ограничивает число возможных каналов эволюции системы без ее детального анализа. Так на основании этого закона оказывается возможным априорно отвергнуть любой весьма проект весьма экономически привлекательного вечного двигателя первого рода (устройства, способного совершать работу, превосходящую необходимые для его функционирования затраты энергии).

В основе закона сохранения энергии лежит однородность времени, т.е. равнозначность всех моментов времени, заключающаяся в том, что замена момента времени t_1 моментом времени t_2 без изменения значений координат и скоростей тел не изменяет механических свойств системы. Поведение системы, начиная с момента t_2, будет таким же, каким оно было бы, начиная с момента t_1.

Закон сохранения энергии имеет всеобщий характер. Он применим ко всем без исключения процессам, происходящим в природе. Полное количество энергии в изолированной системе тел и полей всегда остается постоянным; энергия лишь может переходить из одной формы в другую. Этот факт является проявлением неуничтожаемости материи и ее движения.

Причиной изменения скорости тела всегда является его взаимодействие с другими телами. При взаимодействии двух тел всегда изменяются скорости, т.е. приобретаются ускорения. Отношение ускорений двух тел одинаково при любых взаимодействиях. Свойство тела, от которого зависит его ускорение при взаимодействии с другими телами, называется инертностью. Количественной мерой инертности является масса тела. Отношение масс взаимодействующих тел

равно обратному отношению модулей ускорений. Второй закон Ньютона устанавливает связь между кинематической характеристикой движения – ускорением, и динамическими характеристиками взаимодействия – силами.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

или в более точном виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

т.е. скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на него силе. При одновременном действии на одно тело нескольких сил тело движется с ускорением, являющимся векторной суммой ускорений, которые возникли бы при воздействии каждой из этих сил в отдельности. Действующие на тело силы, приложенные к одной точке, складываются по правилу сложения векторов. Это положение называют принципом независимости действия сил. Центром масс называется такая точка твердого тела или системы твердых тел, которая движется так же, как и материальная точка массой, равной сумме масс всей системы в целом, на которую действуют та же результирующая сила, что и на тело.

$$m \cdot \vec{v}_{ц.м.} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Проинтегрировав это выражение по времени, можно получить выражения для координат центра масс. Центр тяжести – точка приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих на частицы этого тела при любом положении в пространстве. Если линейные размеры тела малы по сравнению с размером Земли, то центр масс совпадает с центром тяжести. Сумма моментов всех сил элементарных тяжести относительно любой оси, проходящей через центр тяжести, равна нулю.

Потенциальная энергия характеризует взаимодействующие тела, кинетическая – движущиеся. И та, и другая возникают в результате взаимодействия

тел. Если несколько тел взаимодействую между собой только силами тяготения и силами упругости, и никакие внешние силы на них не действуют (или же их равнодействующая равна нулю), то при любых взаимодействиях тел работа сил упругости или сил тяготения равна изменению потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком. В то же время, по теореме о кинетической энергии (изменение кинетической энергии тела равно работе внешних сил) работа тех же сил равна изменению кинетической энергии.

$$A = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right),\ A = E_{k2} - E_{k1} \Rightarrow E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

Из этого равенства следует, что сумма кинетической и потенциальной энергий тел, составляющих замкнутую систему и взаимодействующих между собой силами тяготения и упругости, остается постоянной. Сумма кинетической и потенциальной энергий тел называется полной механической энергией. Полная механическая энергия замкнутой системы тел, взаимодействующих между собой силами тяготения и упругости, остается неизменной. Работа сил тяготения и упругости равна, с одной стороны, увеличению кинетической энергии, а с другой – уменьшению потенциальной, то есть работа равна энергии, превратившейся из одного вида в другой.

1.5 Гидростатика. Равновесие жидкостей и газов

Гидростатика – наиболее простой раздел гидроаэромеханики, который исследует ситуации, когда движение отсутствует или скорость пренебрежимо мала. Гидростатика позволяет понять некоторые свойства такой важной гидродинамической величины, как давление. Давление на опору оказывают и твёрдые, и сыпучие вещества, но оно отличается от гидростатического. Давление твёрдого тела определяется его весом, давление жидкости – её глубиной. Сила давления *p*на дно сосуда не зависит от его формы, а определяется только уровнем налитой в сосуд жидкости в соответствии с гидростатической формулой:

$$p = p_o + pgh$$

где p – плотность жидкости;

g – ускорение свободного падения;

h – глубина погружения;

p_o – атмосферное давление.

Сыпучие тела, подобно жидкости и газу, могут оказывать давление на боковую поверхность, но для такого давления не выполняется закон Паскаля, утверждающий, что давление в любом месте покоящейся жидкости ил газа по всем направлениям одинаково, причём давление одинаково передаётся по всему объёму жидкости или газа. В законе Паскаля вес жидкости или газа не учитывается.

Законом Паскаля в гидростатике называется следующее утверждение, сформулированное французским учёным Блезом Паскалем: давление, производимое на жидкость или газ, передается в любую точку без изменений во всех направлениях. На основе закона Паскаля работают различные гидравлические устройства: тормозные системы, гидравлические прессы. В законе Паскаля речь идет не о давлениях в разных точках гидравлической системы, а о возмущениях давления в разных точках, поэтому закон справедлив и для жидкости в поле силы тяжести.В случае движущейся несжимаемой жидкости можно условно говорить о справедливости закона Паскаля, ибо добавление произвольной постоянной величины к давлению не меняет вида уравнения движения жидкости (уравнение Эйлера).

Уравнение Эйлера — одно из основных уравнений гидродинамики идеальной жидкости.

Классическое уравнение Эйлера.

Рассмотрим движение идеальной жидкости. Выделим внутри неё некоторый объём V. Согласно второму закону Ньютона, ускорение центра масс этого объёма пропорционально полной силе, действующей на него. В случае идеальной жидкости эта сила сводится к давлению окружающей объём жидкости и, возможно,

воздействию внешних силовых полей. Предположим, что это поле представляет собой силы инерции или гравитации, так что эта сила пропорциональна напряжённости поля и массе элемента объёма. Тогда

$$\int\limits_V \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dm = \int\limits_V \mathbf{g}\,dm - \oint\limits_S p\,d\mathbf{S}$$

где *S* — поверхность выделенного объёма;

g — напряжённость поля. Переходя, согласно формуле Гаусса — Остроградского, от поверхностного интеграла к объёмному и учитывая, что $dm = \rho\,dV$;

где ρ — плотность жидкости в данной точке, получим:

$$\int\limits_V \rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dV = \int\limits_V \rho\,\mathbf{g}\,dV - \int\limits_V \nabla p\,dV$$

В силу произвольности объёма *V* подынтегральные функции должны быть равны в любой точке:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p$$

Выражая полную производную через конвективную производную и частную производную:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$$

получаем уравнение Эйлера для движения идеальной жидкости в поле тяжести:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

где $\rho\,(x, y, z, t)$ — плотность жидкости;

$p\,(x, y, z, t)$ — давление в жидкости;

$\mathbf{v}\,(x, y, z, t)$ — вектор скорости жидкости;

$\mathbf{g}\,(x, y, z, t)$ — вектор напряжённости силового поля;

∇ — оператор набла для трёхмерного пространства.

К основным законам гидростатики, помимо закона Паскаля и гидростатической формулы, можно отнести закон Архимеда.

Закон Архимеда — один из главных законов гидростатики и статики газов.Закон Архимеда формулируется следующим образом: на тело, погружённое в жидкость (или газ), действует выталкивающая сила, равная весу жидкости (или газа) в объёме тела. Сила называется силой Архимеда:

$$F_A = \rho g V,$$

гдеρ— плотность жидкости (газа);

g— ускорение свободного падения;

V — объём погружённого тела (или часть объёма тела, находящаяся ниже поверхности).

Если тело плавает на поверхности (равномерно движется вверх или вниз), то выталкивающая сила (называемая также архимедовой силой) равна по модулю (и противоположна по направлению) силе тяжести, действовавшей навытесненный телом объём жидкости (газа), и приложена к центру тяжести этого объёма.Следует заметить, что тело должно быть полностью окружено жидкостью (либо пересекаться с поверхностью жидкости). Так, например, закон Архимеда нельзя применить к кубику, который лежит на дне резервуара, герметично касаясь дна.

Что касается тела, которое находится в газе, например в воздухе, то для нахождения подъёмной силы нужно заменить плотность жидкости на плотность газа. Например, шарик с гелием летит вверх из-за того, что плотность гелия меньше, чем плотность воздуха.

Закон Архимеда можно объяснить при помощи разности гидростатических давлений на примере прямоугольного тела.

$$P_B - P_A = \rho g h$$
$$F_B - F_A = \rho g h S = \rho g V,$$

где P_A, P_B — давления в точках A и B;
ρ — плотность жидкости;
h — разница уровней между точками A и B, S — площадь горизонтального поперечного сечения тела;
V — объём погружённой части тела.

В теоретической физике также применяют закон Архимеда в интегральной форме:

$$F_A = \iint\limits_S p dS$$

где S — площадь поверхности;
p — давление в произвольной точке, интегрирование производится по всей поверхности тела.

В отсутствие гравитационного поля, то есть в состоянии невесомости, закон Архимеда не работает. Космонавты с этим явлением знакомы достаточно хорошо. В частности, в невесомости отсутствует явление (естественной) конвекции, поэтому, например, воздушное охлаждение и вентиляция жилых отсеков космических аппаратов производятся принудительно, вентиляторами.

1.6OMaple

Для построения и решения своей математической модели я использую Maple.

Maple — система компьютерной математики, рассчитанная на широкий круг пользователей. До недавнего времени ее называли системой компьютерной алгебры, Ито указывало на особую роль символьных вычислений и преобразований, которые способна осуществлять эта система. Но такое название сужает сферу применения системы. На самом деле она уже способна выполнять быстро и эффективно не только символьные, но и численные расчеты, причем сочетает это с превосходными средствами графической визуализации и подготовки электронных документов.

Казалось бы, нелепо называть такую мощную систему, как Maple 7 математической системой «для всех». Однако по мере ее распространения она становится полезной для многих пользователей ПК, вынужденных в силу обстоятельств (работа, учеба, хобби) заниматься математическими вычислениями и всем, что с ними связано. А все это простирается от решения учебных задач в вузах до моделирования сложных физических объектов, систем и устройств, и даже создания художественной графики (например, фракталов).

Для математиков-профессионалов возможности систем символьной математики, реализованных на массовых ПК класса IBM PC, порой являются полной неожиданностью и вызывают вполне заслуженное удивление и восхищение, но иногда и резкое отрицание. Впрочем, последнее характерно скорее для тех, кто с системой Maple просто не работал и относится к ней, как дама из анекдота о паровозе — увидев паровоз впервые, она воскликнула: «Не может быть, что он едет без лошадей!» Maple — тщательно и всесторонне продуманная система компьютерной математики. Она с равным успехом может использоваться как для простых, так и для самых сложных вычислений и выкладок. Заслуженной популярностью системы Maple (всех версий) пользуются в университетах — свыше 300 самых крупных университетов мира (включая и наш МГУ) взяли эту систему на вооружение. А число только зарегистрированных пользователей системы уже давно превысило один миллион. Ядро системы Maple используется в

ряде других математических систем, например в MATLAB и Mathcad, для реализации в них символьных вычислений.

Добавьте к этому куда большее число незарегистрированных пользователей — ведь система записана на многих компакт-дисках, лихо продаваемых в России по вполне доступным ценам. Если учесть все это, то оказывается, что популярность системы Maple ничуть не ниже, а то и выше, чем у гораздо более простых систем, таких как Derive и Mathcad. Вот и решайте, какая из систем и впрямь рассчитана на всех!

Maple — типичная интегрированная система. Она объединяет в себе:

– мощный язык программирования (он же язык для интерактивного общения с системой);
– редактор для подготовки и редактирования документов и программ;
– современный многооконный пользовательский интерфейс с возможностью работы в диалоговом режиме;
– мощную справочную систему со многими тысячами примеров;
– ядро алгоритмов и правил преобразования математических выражений;
– численный и символьный процессоры;
– систему диагностики;
– библиотеки встроенных и дополнительных функций;
– пакеты функций сторонних производителей и поддержку некоторых других языков программирования и программ.

1.7 Динамика течений реки Кянда

Для построения математической модели динамики течений реки Кянда взяты экспериментальные данные Института океанологии им. П. П. Широва РАН.

Предполагается, что течение в реке однородно, а жидкость идеальна и несжимаема. Течение жидкости описывается законом об изменении количества движения:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{1}{\rho} grad p, \quad (1)$$

Где $\vec{v}$ – вектор скоростей;

$\vec{F}$ – вектор внешних объемных сил;

$\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ c^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли;

ρ – плотность жидкости;

t – время;

p – давление.

Уравнение движения дополняется условием несжимаемости:

$$div\vec{v} = 0.$$

Вектор внешних объемных сил, влияющих на динамику течения, состоит из двух слагаемых, а именно:

$$\vec{F} = \vec{F_0} + \vec{F_1}$$

где:

$$\overrightarrow{F_0} = grad\frac{GM_0}{r}, \qquad \overrightarrow{F_1} = grad\frac{GM}{\ell},$$

где G – гравитационная постоянная;

M_0 – масса Земли;

M – масса возмущающего тела (Луна, Солнца);

r – расстояние от центра Земли до частицы жидкости;

$\ell = \sqrt{d^2 - 2drcos\theta + r^2}$ – расстояние от частицы жидкости до центра возмущающего тела;

d – расстояние от центра Земли до центра возмущающего тела.

Все расстояния показаны на рисунке 1.

Потенциал силы притяжения, раскладывается в ряд по полиномам Лежандра:

$$\frac{GM}{\ell} = \frac{GM}{d}\sum\left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

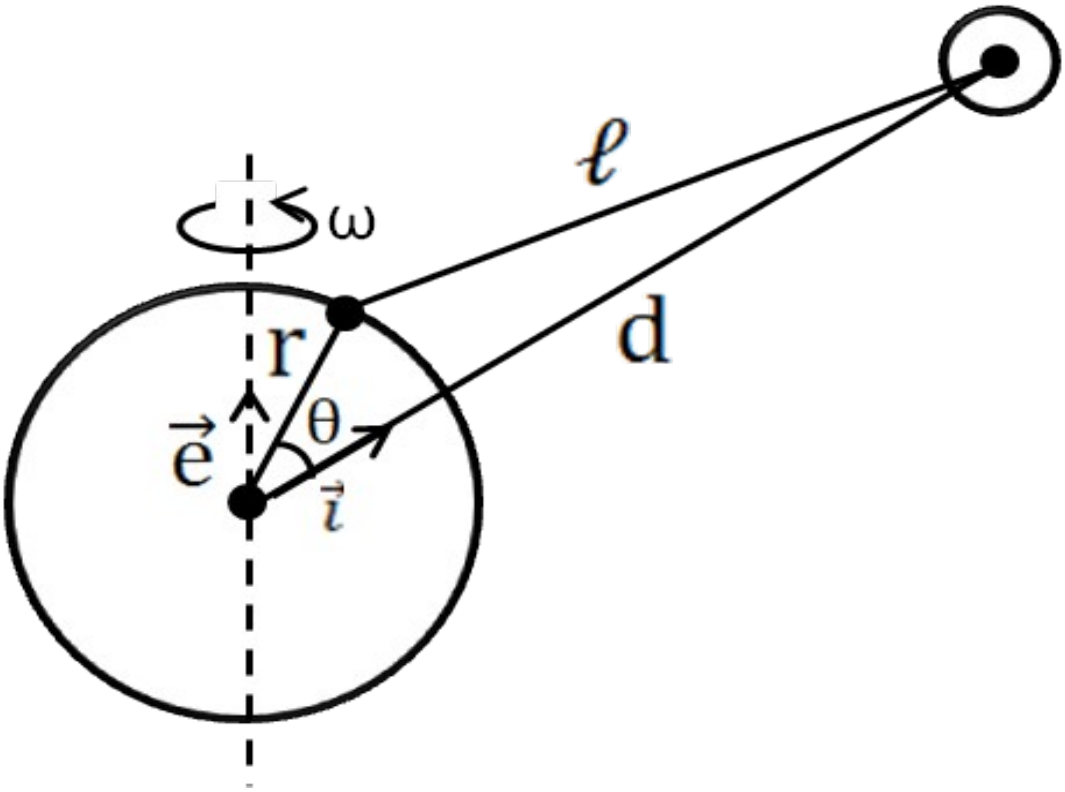


Рисунок 1 – Взаимное расположение возмущающего тела и Земли.

Учитывается только три слагаемых ввиду малости $^{r/d}$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{GM}{d^3}(3(\vec{r}\cdot\vec{i})\vec{i} - \vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (2)$$

где, как принято в океанологии, давление равно:

$$p = \rho G\left(\frac{M_0}{r} + x\frac{M}{d^2}\right) + p_0$$

Уравнение (2) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Решение

$\vec{r} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{e} + \gamma\vec{i}\times\vec{e}$ отсюда подставляем в уравнение (2), получим:

$$\begin{cases} \vec{v} = \alpha'\vec{i} + \beta'\vec{e} + \gamma'\vec{i} \times \vec{e} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha\,"\vec{i} + \beta"\,\vec{e} + \gamma"\,\vec{i} \times \vec{e} \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha\,"\vec{i} + \beta"\,\vec{e} + \gamma"\,\vec{i} \times \vec{e} \Rightarrow$$

$$\alpha\,"\vec{i} + \beta"\,\vec{e} + \gamma"\,\vec{i} \times \vec{e} = \frac{GM}{d^3}(3(\alpha + \beta\vec{e} \cdot i + \gamma \cdot 0)i - \alpha\vec{i} + \beta\vec{e} + \gamma\vec{i} \times \vec{e}) - 2\omega\vec{e} \times (\dot{\alpha}\vec{i} + + \dot{\beta}\vec{e} + \dot{\gamma}\vec{i} \times \vec{e}$$

(4)

$$\frac{GM}{d^3}\left((2\alpha + 3\beta\chi)\vec{i} - \beta\vec{e} - \gamma\vec{i} \times \vec{e}\right) + 2\omega\dot{\alpha}\vec{i} \times \vec{e} - 2\omega\gamma''(\vec{i} - (\dot{e} \cdot \vec{e})\vec{e}) \quad (5)$$

Из уравнения (5) получаем систему уравнения вида:

$$\begin{cases} \alpha" = \frac{GM}{d^3}(2\alpha + 3\beta\chi) - 2\omega\gamma' \\ \beta" = -\frac{GM}{d^3}\beta + 2\omega\gamma'\chi \\ \gamma" = -\gamma\frac{GM}{d^3} + 2\omega\alpha' \end{cases} \quad (6)$$

Каждое уравнение из системы уравнений делим на ω^2 получим:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = -2\dot{\gamma} + a(2\alpha + 3\beta\chi) \\ \ddot{\beta} = 2\dot{\gamma}\chi - a\beta \\ \ddot{\gamma} = 2\dot{\alpha} - a\gamma \end{cases}$$

где $a = \frac{GM}{d^3\omega^2}$;

$\chi = \vec{i} \cdot \vec{e}$;

$\cdot = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}$.

Решение уравнения (2) содержит шесть констант, которые находим, задавая радиус-вектор и скорость в начальный момент времени. В итоге найдем решение ввиде $\vec{r} = \vec{r}(t, \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{v_0})$. Величины $\overrightarrow{r_0}$ и $\overrightarrow{v_0}$ связанны в силу уравнения неразрывности. Определительматрицы $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \overrightarrow{r_0}}\right)$ в любой момент времени равен единице. Особенно важно при решении получить периодическую функцию.

1.8 Решение задачи

В Mapleпеременная γ встроенная, поэтому вместо γ я использовала δ.

$z^{def} = \omega t\ , \omega > 0$

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = -2\ddot{\delta} + a(2\alpha + 3\chi\beta) \\ \ddot{\beta} = 2\chi\ddot{\delta} - a\beta \\ \ddot{\delta} = 2\dot{\alpha} - a\delta \end{cases}$$

Сделаем подстановку $\begin{matrix} \alpha & c_1 \\ \beta & = c_2 \cdot e^{\varphi z} \\ \delta & c_3 \end{matrix}$, в результате найдем следующее

кубическое уравнение для определения параметра φ:

$$A^3 + 4 \cdot A^2 + (4a - 3a^2 - 12\chi^2) \cdot A - 2a^3 = 0\,, A = \varphi^2 \quad (1)$$

В тех случаяхкогда алгебраическая кратность всех собственных значений φ совпадает с геометрической, общее решение исходной системы принимает вид:

$$\alpha(z) = c_1^{(1)} e^{\sqrt{A_1}z} + c_1^{(2)} e^{\sqrt{A_2}z} + c_1^{(3)} e^{\sqrt{A_3}z} + c_1^{(4)} e^{-\sqrt{A_1}z} + c_1^{(5)} e^{-\sqrt{A_2}z} + c_1^{(6)} e^{-\sqrt{A_3}z}$$

$$\beta(z) = c_2^{(1)} e^{\sqrt{A_1}z} + c_2^{(2)} e^{\sqrt{A_2}z} + c_2^{(3)} e^{\sqrt{A_3}z} + c_2^{(4)} e^{-\sqrt{A_1}z} + c_2^{(5)} e^{-\sqrt{A_2}z} + c_2^{(6)} e^{-\sqrt{A_3}z}$$

$$\delta(z) = c_3^{(1)} e^{\sqrt{A_1}z} + c_3^{(2)} e^{\sqrt{A_2}z} + c_3^{(3)} e^{\sqrt{A_3}z} + c_3^{(4)} e^{-\sqrt{A_1}z} + c_3^{(5)} e^{-\sqrt{A_2}z} + c_3^{(6)} e^{-\sqrt{A_3}z}$$

A_1, A_2, A_3 - корни уравнения(1)

Коэффициенты $c_2^{(j)}, c_3^{(j)}$ выражаются через $c_1^{(j)}$ и φ_j, j=1…6

$$\varphi_1 = \sqrt{A_1}\,, \varphi_2 = \sqrt{A_2}\,, \varphi_3 = \sqrt{A_3}\,, \varphi_4 = -\sqrt{A_1}\,, \varphi_5 = -\sqrt{A_2}\,, \varphi_6 = -\sqrt{A_3}$$

Для определения коэффициентов $c_1^{(j)}$, j=1…6 воспользуемся начальными условиями:

$$\alpha(0) = \alpha_0\ , \beta(0) = \beta_0, \delta(0) = \delta_0$$

$$\dot{\alpha}(0) = \frac{U_0}{\omega}\ , \dot{\beta}(0) = \frac{v_0}{\omega}\ , \dot{\delta}(0) = \frac{w_0}{\omega}$$

В результате получим алгебраическую систему:

$$\sum_{j=0}^{6} c_1^{(j)} = \alpha_0, \quad \sum_{j=0}^{6} c_2^{(j)} = \beta_0, \quad \sum_{j=0}^{6} c_3^{(j)} = \delta_0$$

$$\sum_{j=0}^{6} \varphi_j c_1^{(j)} = \frac{U_0}{\omega}\ , \quad \sum_{j=0}^{6} \varphi_j c_2^{(j)} = \frac{v_0}{\omega}\ , \quad \sum_{j=0}^{6} \varphi_j c_3^{(j)} = \frac{\delta_0}{\omega}$$

Решить эту систему можно по правилу Крамера.В Maplecистема задана уравнениями S_j, j=1...6. Рассмотрим возможность существования периодических по zрешений с вещественным периодом. Пользуясь обобщенными формулами Виета, получим:

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 2a^3$$

Если A_1>0, $A_2 > 0, A_3 > 0$, то решений с вещественным периодом нет.

Если $A_1 < 0, A_2 < 0, A_3 < 0$, то решений с вещественным периодом существует не при любых начальных данных.

Условия существования:

1) $A_1 = \frac{n^2}{m^2} A_2$, n ,m $\in$ N

$c_k^{(3)} = 0, c_k^{(6)} = 0$ - ограничения k=1,2,3

2) $A_1 \neq \frac{n^2}{m^2} A_2$, n ,m $\in$ N

$c_k^{(3)} = 0, c_k^{(6)} = 0\ , c_k^{(2)} = 0, c_k^{(5)} = 0$ - ограничения k=1,2,3

- ограничения k=1,2,3

или $c_k^{(3)} = 0,\ c_k^{(6)} = 0\ \ c_k^{(1)} = 0, c_k^{(2)} = 0$,

Если $A_1, A_2 -$ пара комлексно-сопряженных корней, $A_3 > 0$, то решений с вещественным периодом нет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время получило всеобщее признание то, что успех развития многих областей науки и техники существенно зависит от развития многих направлений математики.

тематическая модель осуществляет представление некоторой системы или явления внешнего мира с помощью математических символов и зависимостей. Построение математической модели является основой изучения и проектирования сложных систем и объектов. Качество модели определяет правильность или ошибочность выводов, полученных на основе её анализа. Любая математическая модель может возникнуть тремя путями в результате:

изучения и обобщения экспериментального материала;

изучения частных моделей и их обобщения методом индукции;

применения процесса дедукции, в результате которого модель получается как частный случай из некоторой более общей модели.

В настоящее время построение математических моделей распространено в различных областях знания и выработано немало принципов и подходов, имеющих общий характер. Процесс моделирования состоит из последовательности этапов, которые отличаются конкретными целями и средствами, и выполняются в определённой очерёдности. Эта очерёдность может изменяться из-за противоречивости требований, предъявляемых к модели, невозможности с самого начала предусмотреть все детали и устранить все неопределённости в модели, необходимости применения неформальных процедур. Что же является отправной точкой в построении моделей? Исходным пунктом служит некоторая эмпирическая ситуация, весьма расплывчатая и сложная, так что точное описание ситуации чаще всего невозможно. Процедура преобразования такой ситуации к виду, когда для её изучения можно применить математические методы, и есть процедура построения математической модели.

В результате проделанной работы можно сделать следующие выводы.

Поставленная задача построения математической модели выполнена. При построение данной модели изучено много новых терминов и понятий. Изучены и использованы в работе законы сплошной среды.

С помощью программного пакета Maple поставленная задача выполнена.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1) Афонин, А.М. Теоретические основы разработки и моделирования систем автоматизации: Учебное пособие / А.М. Афонин, Ю.Н. Царегородцев, А.М. Петрова, Ю.Е. Ефремова. - М.: Форум, 2011. - 192 с.

2) Афонин, В.В. Моделирование систем: Учебно-практическое пособие / В.В. Афонин. - М.: БИНОМ. ЛЗ, ИНТУИТ, 2012. - 231 с.

3) Барботько, А.И. Основы теории математического моделирования: Учебное пособие / А.И. Барботько, А.О. Гладышкин. - Ст. Оскол: ТНТ, 2013. - 212 с.

4) Горский, В.В. Математическое моделирование процессов тепло- и массообмена при аэротермохимическом разрушении композиционных теплозащитных материалов на кремнеземной основе / В.В. Горский. - М.: Научный мир, 2008. - 256 с.

5) Гриневский, С.О. Гидрогеодинамическое моделирование взаимодействия подземных и поверхостных вод: Монография / С.О. Гриневский. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 152 с.

6) Тарасевич, Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс: Учебное пособие / Ю.Ю. Тарасевич. - М.: ЛИБРОКОМ, 2013. - 152 с.

7) М. Н. Кирсанов. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. М.: Физматлит, 2010, 264с.

8) М. Н. Кирсанов. "Практика программирования в системе Maple" М.: Издательский дом МЭИ, 2011, 208с

9) В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба "Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект" / Монография / Гродно: Гродненский Госуниверситет, 2011, 517 с

10) А. Н. Васильев Maple 8. Самоучитель, М.: Диалектика, Вильямс, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЯ

```
>restart;
>Eq1:=diff(alpha(z),z,z)+2*diff(delta(z),z)-a*(2*alpha(z)
+3*beta(z)*chi);
```

$$Eq1 := \frac{d^2}{dz^2}\alpha(z) + 2\left(\frac{d}{dz}\delta(z)\right) - a\left(2\,\alpha(z) + 3\,\beta(z)\,\chi\right)$$

```
>Eq2:=diff(beta(z),z,z)-2*chi*diff(delta(z),z)+a*beta(z);
```

$$Eq2 := \frac{d^2}{dz^2}\beta(z) - 2\,\chi\left(\frac{d}{dz}\delta(z)\right) + a\,\beta(z)$$

```
> Eq3:=diff(delta(z),z,z)-2*diff(alpha(z),z)+a*delta(z);
```

$$Eq3 := \frac{d^2}{dz^2}\delta(z) - 2\left(\frac{d}{dz}\alpha(z)\right) + a\,\delta(z)$$

```
>
```

```
>
Eq1_1:=simplify(expand(subs(alpha(z)=C[1]*exp(lambda*z),beta
(z)=C[2]*exp(lambda*z),delta(z)=C[3]*exp(lambda*z),Eq1/
exp(lambda*z))));
```

$$Eq1_1 := C_1 \lambda^2 + 2 C_3 \lambda - 2 a C_1 - 3 a C_2 \chi$$

```
>
Eq2_1:=simplify(expand(subs(alpha(z)=C[1]*exp(lambda*z),beta
(z)=C[2]*exp(lambda*z),delta(z)=C[3]*exp(lambda*z),Eq2/
exp(lambda*z))));
```

$$Eq2_1 := C_2 \lambda^2 - 2 \chi C_3 \lambda + a C_2$$

```
>
Eq3_1:=simplify(expand(subs(alpha(z)=C[1]*exp(lambda*z),beta
(z)=C[2]*exp(lambda*z),delta(z)=C[3]*exp(lambda*z),Eq3/
exp(lambda*z))));
```

$$Eq3_1 := C_3 \lambda^2 - 2 C_1 \lambda + a C_3$$

```
>with(PolynomialIdeals):
>
Alg:=PolynomialIdeal({Eq1_1,Eq2_1,Eq3_1},variables={lambda,C
[2],C[3]});
```

$$Alg := \langle C_2 \lambda^2 - 2 \chi C_3 \lambda + a C_2,\ C_3 \lambda^2 - 2 C_1 \lambda + a C_3,\ C_1 \lambda^2 + 2 C_3 \lambda - 2 a C_1 - 3 a C_2 \chi \rangle$$

```
>NumberOfSolutions(Alg);
```

$$6$$

```
>with(Groebner):
>Alg_s:=Solve(Alg,{lambda,C[2],C[3]});
```

$$Alg_s := \left\{ \left[\langle 4 a \lambda^2 - 3 a^2 \lambda^2 - 2 a^3 - 12 a \lambda^2 \chi^2 + 4 \lambda^4 + \lambda^6,\ -12 \chi^2 \lambda a C_1 + 6 a^2 \chi^2 C_3 + 4 C_1 \lambda^3 - \lambda^3 a C_1 - 2 \lambda a^2 C_1 + C_1 \lambda^5,\ 2 a^2 C_1 + 6 a^2 \chi^2 C_1 + 9 a^2 \chi^3 C_2 - 3 \chi^2 \lambda^2 a C_1 + \lambda^2 a C_1 - C_1 \lambda^4 - 4 C_1 \lambda^2 \rangle,\ \{\} \right] \right\}$$

```
> N1:=collect(subs(lambda=sqrt(A),4*a*lambda^2-
3*a^2*lambda^2-2*a^3-
12*a*lambda^2*chi^2+4*lambda^4+lambda^6),A);
```

$$N1 := A^3 + 4 A^2 + \left(4 a - 3 a^2 - 12 a \chi^2\right) A - 2 a^3$$

```
>
```

```
>
E1:=-12*chi^2*lambda*a*C[1]+6*a^2*chi^2*C[3]+4*C[1]*lambda^3
-lambda^3*a*C[1]-2*lambda*a^2*C[1]+C[1]*lambda^5;
```

$$E1 := -12\,\chi^2\,\lambda\,a\,C_1 + 6\,a^2\,\chi^2\,C_3 + 4\,C_1\,\lambda^3 - \lambda^3\,a\,C_1 - 2\,\lambda\,a^2\,C_1 + C_1\,\lambda^5$$

```
> E2:=2*a^2*C[1]+6*a^2*chi^2*C[1]+9*a^2*chi^3*C[2]-
3*chi^2*lambda^2*a*C[1]+lambda^2*a*C[1]-C[1]*lambda^4-
4*C[1]*lambda^2;
```

$$E2 := 2\,a^2\,C_1 + 6\,a^2\,\chi^2\,C_1 + 9\,a^2\,\chi^3\,C_2 - 3\,\chi^2\,\lambda^2\,a\,C_1 + \lambda^2\,a\,C_1 - C_1\,\lambda^4 - 4\,C_1\,\lambda^2$$

```
> C1[3]:=solve(E1,C[3]);
```

$$C1_3 := \frac{1}{6}\,\frac{\lambda\,C_1\left(12\,a\,\chi^2 - \lambda^4 - 4\,\lambda^2 + a\,\lambda^2 + 2\,a^2\right)}{a^2\,\chi^2}$$

```
> C1[2]:=solve(E2,C[2]);
```

$$C1_2 := -\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(C_1\left(2\,a^2 + 6\,a^2\,\chi^2 - 3\,a\,\lambda^2\,\chi^2 + a\,\lambda^2 - \lambda^4 - 4\,\lambda^2\right)\right)$$

```
> S1:=sum(c[1,j],j=1..6)-alpha[0];
```

$$S1 := c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} + c_{1,4} + c_{1,5} + c_{1,6} - \alpha_0$$

```
> S2:=sum(c[2,j],j=1..6)-beta[0];
```

$$S2 := c_{2,1} + c_{2,2} + c_{2,3} + c_{2,4} + c_{2,5} + c_{2,6} - \beta_0$$

```
> S3:=sum(c[3,j],j=1..6)-delta[0];
```

$$S3 := c_{3,1} + c_{3,2} + c_{3,3} + c_{3,4} + c_{3,5} + c_{3,6} - \delta_0$$

```
> S4:=sum(lambda[j]*c[1,j],j=1..6)-u[0]/omega;
```

$$S4 := \lambda_1\,c_{1,1} + \lambda_2\,c_{1,2} + \lambda_3\,c_{1,3} + \lambda_4\,c_{1,4} + \lambda_5\,c_{1,5} + \lambda_6\,c_{1,6} - \frac{u_0}{\omega}$$

```
> S5:=sum(lambda[j]*c[2,j],j=1..6)-v[0]/omega;
```

$$S5 := \lambda_1 c_{2,1} + \lambda_2 c_{2,2} + \lambda_3 c_{2,3} + \lambda_4 c_{2,4} + \lambda_5 c_{2,5} + \lambda_6 c_{2,6} - \frac{v_0}{\omega}$$

```
> S6:=sum(lambda[j]*c[3,j],j=1..6)-w[0]/omega;
```

$$S6 := \lambda_1 c_{3,1} + \lambda_2 c_{3,2} + \lambda_3 c_{3,3} + \lambda_4 c_{3,4} + \lambda_5 c_{3,5} + \lambda_6 c_{3,6} - \frac{w_0}{\omega}$$

```
>
S2:=subs(c[2,1]=subs(C[1]=c[1,1],lambda=lambda[1],C1[2]),c[2
,2]=subs(C[1]=c[1,2],lambda=lambda[2],C1[2]),c[2,3]=subs(C[1
]=c[1,3],lambda=lambda[3],C1[2]),c[2,4]=subs(C[1]=c[1,4],lam
bda=-lambda[1],C1[2]),c[2,5]=subs(C[1]=c[1,5],lambda=-
lambda[2],C1[2]),c[2,6]=subs(C[1]=c[1,6],lambda=-
lambda[3],C1[2]),S2);
```

$$
\begin{aligned}
S2 := & -\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(c_{1,1}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\,\lambda_1^2\,\chi^2\right.\right.\\
& \left.\left.+a\,\lambda_1^2-\lambda_1^4-4\,\lambda_1^2\right)\right)\\
& -\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(c_{1,2}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\,\lambda_2^2\,\chi^2\right.\right.\\
& \left.\left.+a\,\lambda_2^2-\lambda_2^4-4\,\lambda_2^2\right)\right)\\
& -\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(c_{1,3}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\,\lambda_3^2\,\chi^2\right.\right.\\
& \left.\left.+a\,\lambda_3^2-\lambda_3^4-4\,\lambda_3^2\right)\right)\\
& -\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(c_{1,4}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\,\lambda_1^2\,\chi^2\right.\right.\\
& \left.\left.+a\,\lambda_1^2-\lambda_1^4-4\,\lambda_1^2\right)\right)\\
& -\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(c_{1,5}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\,\lambda_2^2\,\chi^2\right.\right.\\
& \left.\left.+a\,\lambda_2^2-\lambda_2^4-4\,\lambda_2^2\right)\right)\\
& -\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(c_{1,6}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\,\lambda_3^2\,\chi^2\right.\right.\\
& \left.\left.+a\,\lambda_3^2-\lambda_3^4-4\,\lambda_3^2\right)\right)-\beta_0
\end{aligned}
$$

```
>
S5:=subs(c[2,1]=subs(C[1]=c[1,1],lambda=lambda[1],C1[2]),c[2
,2]=subs(C[1]=c[1,2],lambda=lambda[2],C1[2]),c[2,3]=subs(C[1
]=c[1,3],lambda=lambda[3],C1[2]),c[2,4]=subs(C[1]=c[1,4],lam
bda=-lambda[1],C1[2]),c[2,5]=subs(C[1]=c[1,5],lambda=-
lambda[2],C1[2]),c[2,6]=subs(C[1]=c[1,6],lambda=-
lambda[3],C1[2]),lambda[4]=-lambda[1],lambda[5]=-
lambda[2],lambda[6]=-lambda[3],S5);
```

$$S5 := -\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(\lambda_1\,c_{1,1}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\right.\right.$$
$$\left.\lambda_1^2\,\chi^2+a\,\lambda_1^2-\lambda_1^4-4\,\lambda_1^2\right)\Big)$$
$$-\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(\lambda_2\,c_{1,2}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\right.\right.$$
$$\left.\lambda_2^2\,\chi^2+a\,\lambda_2^2-\lambda_2^4-4\,\lambda_2^2\right)\Big)$$
$$-\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(\lambda_3\,c_{1,3}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\right.\right.$$
$$\left.\lambda_3^2\,\chi^2+a\,\lambda_3^2-\lambda_3^4-4\,\lambda_3^2\right)\Big)$$
$$+\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(\lambda_1\,c_{1,4}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\right.\right.$$
$$\left.\lambda_1^2\,\chi^2+a\,\lambda_1^2-\lambda_1^4-4\,\lambda_1^2\right)\Big)$$
$$+\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(\lambda_2\,c_{1,5}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\right.\right.$$
$$\left.\lambda_2^2\,\chi^2+a\,\lambda_2^2-\lambda_2^4-4\,\lambda_2^2\right)\Big)$$
$$+\frac{1}{9}\,\frac{1}{a^2\,\chi^3}\left(\lambda_3\,c_{1,6}\left(2\,a^2+6\,a^2\,\chi^2-3\,a\right.\right.$$
$$\left.\left.\lambda_3^2\,\chi^2+a\,\lambda_3^2-\lambda_3^4-4\,\lambda_3^2\right)\right)-\frac{v_0}{\omega}$$

```
>
S3:=subs(c[3,1]=subs(C[1]=c[1,1],lambda=lambda[1],C1[3]),c[3
,2]=subs(C[1]=c[1,2],lambda=lambda[2],C1[3]),c[3,3]=subs(C[1
]=c[1,3],lambda=lambda[3],C1[3]),c[3,4]=subs(C[1]=c[1,4],lam
bda=-lambda[1],C1[3]),c[3,5]=subs(C[1]=c[1,5],lambda=-
lambda[2],C1[3]),c[3,6]=subs(C[1]=c[1,6],lambda=-
lambda[3],C1[3]),S3);
```

$$S3 :=$$

$$\frac{1}{6}\,\frac{1}{a^2\,\chi^2}\left(\lambda_1\,c_{1,1}\left(12\,a\,\chi^2-\lambda_1^4-4\,\lambda_1^2+a\,\lambda_1^2+2\,a^2\right)\right)$$
$$+\frac{1}{6}\,\frac{1}{a^2\,\chi^2}\left(\lambda_2\,c_{1,2}\left(12\,a\,\chi^2-\lambda_2^4-4\,\lambda_2^2+a\,\lambda_2^2+2\,a^2\right)\right)$$
$$+\frac{1}{6}\,\frac{1}{a^2\,\chi^2}\left(\lambda_3\,c_{1,3}\left(12\,a\,\chi^2-\lambda_3^4-4\,\lambda_3^2+a\,\lambda_3^2+2\,a^2\right)\right)$$
$$-\frac{1}{6}\,\frac{1}{a^2\,\chi^2}\left(\lambda_1\,c_{1,4}\left(12\,a\,\chi^2-\lambda_1^4-4\,\lambda_1^2+a\,\lambda_1^2+2\,a^2\right)\right)$$
$$-\frac{1}{6}\,\frac{1}{a^2\,\chi^2}\left(\lambda_2\,c_{1,5}\left(12\,a\,\chi^2-\lambda_2^4-4\,\lambda_2^2+a\,\lambda_2^2+2\,a^2\right)\right)$$
$$-\frac{1}{6}\,\frac{1}{a^2\,\chi^2}\left(\lambda_3\,c_{1,6}\left(12\,a\,\chi^2-\lambda_3^4-4\,\lambda_3^2+a\,\lambda_3^2+2\,a^2\right)\right)-\delta_0$$

```
>
S6:=subs(c[3,1]=subs(C[1]=c[1,1],lambda=lambda[1],C1[3]),c[3
,2]=subs(C[1]=c[1,2],lambda=lambda[2],C1[3]),c[3,3]=subs(C[1
]=c[1,3],lambda=lambda[3],C1[3]),c[3,4]=subs(C[1]=c[1,4],lam
bda=-lambda[1],C1[3]),c[3,5]=subs(C[1]=c[1,5],lambda=-
lambda[2],C1[3]),c[3,6]=subs(C[1]=c[1,6],lambda=-
lambda[3],C1[3]),lambda[4]=-lambda[1],lambda[5]=-
lambda[2],lambda[6]=-lambda[3],S6);
```

$$S6 := \frac{1}{6}\frac{1}{a^2\chi^2}\left(\lambda_1^2 c_{1,1}\left(12a\chi^2 - \lambda_1^4 - 4\lambda_1^2 + a\lambda_1^2 + 2a^2\right)\right) + \frac{1}{6}\frac{1}{a^2\chi^2}\left(\lambda_2^2 c_{1,2}\left(12a\chi^2 - \lambda_2^4 - 4\lambda_2^2 + a\lambda_2^2 + 2a^2\right)\right) + \frac{1}{6}\frac{1}{a^2\chi^2}\left(\lambda_3^2 c_{1,3}\left(12a\chi^2 - \lambda_3^4 - 4\lambda_3^2 + a\lambda_3^2 + 2a^2\right)\right) + \frac{1}{6}\frac{1}{a^2\chi^2}\left(\lambda_1^2 c_{1,4}\left(12a\chi^2 - \lambda_1^4 - 4\lambda_1^2 + a\lambda_1^2 + 2a^2\right)\right) + \frac{1}{6}\frac{1}{a^2\chi^2}\left(\lambda_2^2 c_{1,5}\left(12a\chi^2 - \lambda_2^4 - 4\lambda_2^2 + a\lambda_2^2 + 2a^2\right)\right) + \frac{1}{6}\frac{1}{a^2\chi^2}\left(\lambda_3^2 c_{1,6}\left(12a\chi^2 - \lambda_3^4 - 4\lambda_3^2 + a\lambda_3^2 + 2a^2\right)\right) - \frac{w_0}{\omega}$$

```
> S4:=subs(lambda[4]=-lambda[1],lambda[5]=-
lambda[2],lambda[6]=-lambda[3],S4);
```

$$S4 := \lambda_1 c_{1,1} + \lambda_2 c_{1,2} + \lambda_3 c_{1,3} - \lambda_1 c_{1,4} - \lambda_2 c_{1,5} - \lambda_3 c_{1,6} - \frac{u_0}{\omega}$$

```
>
>chi:=1/2;
```

$$\chi := \frac{1}{2}$$

```
> a:=10;
```

$$a := 10$$

```
>
```

```
> A_1:=fsolve(N1);
```

$$A_1 := -14.48829629,\ -7.622224520,\ 18.11052081$$

Если нужно решить аналитически используем команду solve(N1);

```
>
>lambda[1]:=simplify(sqrt(A_1[1]));
```

$$\lambda_1 := 3.806349470\ I$$

```
>lambda[2]:=simplify(sqrt(A_1[2]));
```

$$\lambda_2 := 2.760837648\ I$$

```
>lambda[3]:=simplify(sqrt(A_1[3]));
```

$$\lambda_3 := 4.255645757$$

```
>omega:=1;
```

$$\omega := 1$$

```
> solve({S1,S2,S3,S4,S5,S6},
{c[1,1],c[1,2],c[1,3],c[1,4],c[1,5],c[1,6]});
```

$$\{c_{1,1} = 0.05356082876\, w_0 - 0.06212058548\, \alpha_0 - 0.1503947245\, \beta_0 + 0.1407144276\, I\, \delta_0 + 0.03951153868\, I\, v_0 - 0.01182263287\, I\, u_0,$$

$$c_{1,2} = -0.1009340375\, \beta_0 - 0.02899106375\, w_0 - 0.1050082164\, I\, \delta_0 + 0.03655920792\, I\, v_0 + 0.04198222896\, \alpha_0 + 0.005795305907\, I\, u_0,$$

$$c_{1,3} = -0.02456976500\, w_0 + 0.5201383565\, \alpha_0 + 0.2513287620\, \beta_0 + 0.05773451641\, \delta_0 + 0.05905772620\, v_0 + 0.1106762295\, u_0,\ c_{1,4} = -0.1503947245\, \beta_0 + 0.05356082876\, w_0 - 0.1407144276\, I\, \delta_0 - 0.03951153868\, I\, v_0 - 0.06212058548\, \alpha_0 + 0.01182263287\, I\, u_0,$$

$$c_{1,5} = 6.824760733\, 10^{-51}\, I \left(1.478938844\, 10^{49}\, I\, \beta_0 + 4.247923830\, 10^{48}\, I\, w_0 + 1.538635866\, 10^{49}\, \delta_0 - 5.356848299\, 10^{48}\, v_0 - 6.151457993\, 10^{48}\, I\, \alpha_0 - 8.491588399\, 10^{47}\, u_0 \right),\ c_{1,6} = -0.05773451641\, \delta_0 - 0.05905772620\, v_0 - 0.1106762295\, u_0 + 0.5201383565\, \alpha_0 - 0.02456976500\, w_0 + 0.2513287620\, \beta_0 \}$$

```
>
```

Поиск периодического решения, соответствующего собственному значению λ_1

```
>
R:=solve({S1,S2,S3,S4,S5,S6,c[1,3]=0,c[1,6]=0,c[1,2]=0,c[1,5
]=0},
```

```
{c[1,1],c[1,2],c[1,3],c[1,4],c[1,5],c[1,6],alpha[0],u[0],v[0
],w[0]});
```

$$R := \{c_{1,1} = -0.3476047692\,\beta_0 + 0.2947900823\,I\,\delta_0,\ c_{1,2} = 0.,\ c_{1,3} = 0.,\ c_{1,4} = 2.049408771\,10^{-10}\,I\,(1.696122190\,10^{9}\,I\,\beta_0 - 1.438415247\,10^{9}\,\delta_0),\ c_{1,5} = 0.,\ c_{1,6} = 0.,\ u_0 = -2.244148147\,\delta_0,\ v_0 = 3.228016911\,\delta_0,\ w_0 = -4.488296276\,\beta_0,\ \alpha_0 = -0.6952095385\,\beta_0\}$$

```
> Al1:=subs(c[1, 1] =
-.3476047692*beta[0]+(.2947900823*I)*delta[0], c[1, 2] = 0.,
c[1, 3] = 0., c[1, 4] =
(2.049408771*10^(-10)*I)*((1.696122190*10^9*I)*beta[0]-
1.438415247*10^9*delta[0]), c[1, 5] = 0., c[1, 6] =
0.,lambda[4]=-lambda[1],lambda[5]=-lambda[2],lambda[6]=-
lambda[3],sum(c[1,j]*exp(lambda[j]*z),j=1..6));
```

$$Al1 := (-0.3476047692\,\beta_0 + 0.2947900823\,I\,\delta_0)\,e^{3.806349470\,I\,z} + 2.049408771\,10^{-10}\,I\,(1.696122190\,10^{9}\,I\,\beta_0 - 1.438415247\,10^{9}\,\delta_0)\,e^{-3.806349470\,I\,z}$$

```
>
Bt1:=subs(c[2,1]=subs(C[1]=c[1,1],lambda=lambda[1],C1[2]),c[
2,2]=subs(C[1]=c[1,2],lambda=lambda[2],C1[2]),c[2,3]=subs(C[
1]=c[1,3],lambda=lambda[3],C1[2]),c[2,4]=subs(C[1]=c[1,4],la
mbda=-lambda[1],C1[2]),c[2,5]=subs(C[1]=c[1,5],lambda=-
lambda[2],C1[2]),c[2,6]=subs(C[1]=c[1,6],lambda=-
lambda[3],C1[2]),c[1, 1] =
-.3476047692*beta[0]+(.2947900823*I)*delta[0], c[1, 2] = 0.,
c[1, 3] = 0., c[1, 4] =
(2.049408771*10^(-10)*I)*((1.696122190*10^9*I)*beta[0]-
1.438415247*10^9*delta[0]), c[1, 5] = 0., c[1, 6] =
0.,lambda[4]=-lambda[1],lambda[5]=-lambda[2],lambda[6]=-
lambda[3],sum(c[2,j]*exp(lambda[j]*z),j=1..6));
```

$$Bt1 := -1.438415245\left(-0.3476047692\,\beta_0 + 0.2947900823\,I\,\delta_0\right)e^{3.806349470\,I\,z} - 2.947900819\,10^{-10}\,I\left(1.696122190\,10^{9}\,I\,\beta_0 - 1.438415247\,10^{9}\,\delta_0\right)e^{-3.806349470\,I\,z}$$

```
>
Dt1:=subs(c[3,1]=subs(C[1]=c[1,1],lambda=lambda[1],C1[3]),c[
3,2]=subs(C[1]=c[1,2],lambda=lambda[2],C1[3]),c[3,3]=subs(C[
1]=c[1,3],lambda=lambda[3],C1[3]),c[3,4]=subs(C[1]=c[1,4],la
mbda=-lambda[1],C1[3]),c[3,5]=subs(C[1]=c[1,5],lambda=-
lambda[2],C1[3]),c[3,6]=subs(C[1]=c[1,6],lambda=-
lambda[3],C1[3]),c[1, 1] =
-.3476047692*beta[0]+(.2947900823*I)*delta[0], c[1, 2] = 0.,
c[1, 3] = 0., c[1, 4] =
(2.049408771*10^(-10)*I)*((1.696122190*10^9*I)*beta[0]-
1.438415247*10^9*delta[0]), c[1, 5] = 0., c[1, 6] =
0.,lambda[4]=-lambda[1],lambda[5]=-lambda[2],lambda[6]=-
lambda[3],sum(c[3,j]*exp(lambda[j]*z),j=1..6));
```

$$Dt1 := -1.696122190\,I\left(-0.3476047692\,\beta_0 + 0.2947900823\,I\,\delta_0\right)e^{3.806349470\,I\,z} - 3.476047693\,10^{-10}\left(1.696122190\,10^{9}\,I\,\beta_0 - 1.438415247\,10^{9}\,\delta_0\right)e^{-3.806349470\,I\,z}$$

Проверка полученного решения

```
>
>simplify(expand(subs(alpha(z)=Al1,beta(z)=Bt1,delta(z)=Dt1,
Eq1)));
```

$$2.\,10^{-9}\,e^{3.806349470\,I\,z}\,\beta_0 - 4.7\,10^{-9}\,I\,e^{3.806349470\,I\,z}\,\delta_0 + 6.\,10^{-9}\,e^{-3.806349470\,I\,z}\,\beta_0 + 7.8\,10^{-9}\,I\,e^{-3.806349470\,I\,z}\,\delta_0$$

```
>
simplify(expand(subs(alpha(z)=Al1,beta(z)=Bt1,delta(z)=Dt1,E
q2)));
```

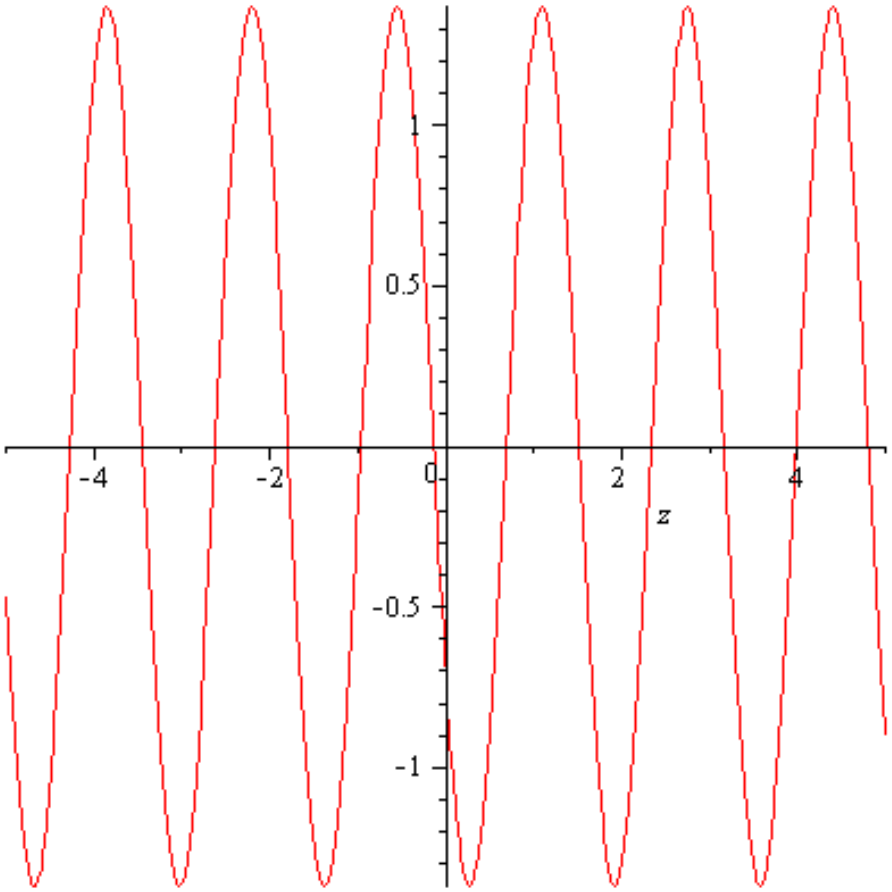
$$-6.\,10^{-9}\,\delta_0\sin(3.806349470\,z)$$

```
>
simplify(expand(subs(alpha(z)=Al1,beta(z)=Bt1,delta(z)=Dt1,E
q3)));
```

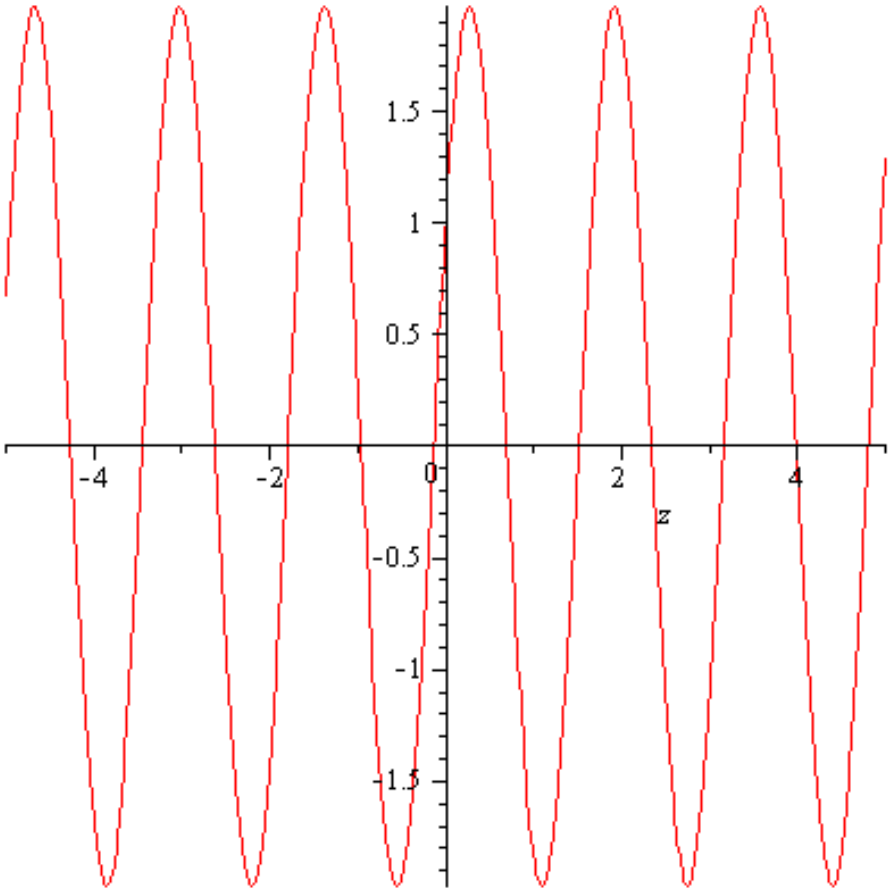
$$3.\,10^{-9}\,I\,e^{3.806349470\,I\,z}\,\beta_0 + 4.\,10^{-9}\,e^{3.806349470\,I\,z}\,\delta_0 - 5.\,10^{-9}\,I\,e^{-3.806349470\,I\,z}\,\beta_0 + 5.\,10^{-9}\,e^{-3.806349470\,I\,z}\,\delta_0$$

```
>
```

```
> plot(subs(beta[0]=1,delta[0]=2,Al1),z=-5..5);
```



```
> plot(subs(beta[0]=1,delta[0]=2,Bt1),z=-5..5);
```




```
> plot(subs(beta[0]=1,delta[0]=2,Dt1),z=-5..5);
```

