«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Лицей

Дипломная работа

Математические задачи, содержащие инвариант, и пути их решения

Выполнила: Коровкина Марина Андреевна

Супервайзер:
Тулякова Анастасия Андреевна

Москва, 2017 г.

Оглавление

Введение.....3

Глава 1. Теоретические основы решения математических задач, содержащих инвариант.....5

1.1. Понятие «инвариантность».....5

1.2 Олимпиадные задачи, содержащие инвариант. «Задачи на отражение»….6

1.3 Инвариантность при решении задач с параметром……..10

Глава 2. Исследование уровня компетентности обучающихся в применении инвариантов.....22

2.1. Исследование первоначального уровня.....22

2.2. Повторное исследование (контрольный эксперимент).....24

Заключение.....26

Приложение 1…….27

Приложение 2…….29

Список литературы.....31

Введение

Успешная сдача ЕГЭ по математике зависит от умения решать задания уровня С. Основные трудности вызывают решения задач, содержащих параметры.

В первую очередь, необходимо определить методы и основные типы решения таких задач. Метод инвариантов – один из алгебраических методов при решении задач с параметрами, необходимый для всех участников учебного процесса.

Кроме того, с помощью данного метода решаются многие задания олимпиадного уровня. Олимпиады играют большую роль в деле воспитания обучающихся, учат логически мыслить, подходить к решению математических задач как к творческому процессу, а также готовят к жизни в современных условиях конкуренции. Умение решать олимпиадные задачи, особенно математические, всегда являлось одним из показателей одаренности ученика.

Актуальность темы «Математические задачи, содержащие инвариант, и пути их решения» определяется потребностью совершенствовать методики подготовки обучающихся старших классов к сдаче ЕГЭ и участию в конкурсах и олимпиадах по математике.

Методологической основой исследования послужили важнейшие теоретические положения, которые обучают нестандартному мышлению при решении математических задач (Е. Ю. Иванова, Г.В. Дорофеев Ю.М., Колягин Г.Г., Д. Пойа и др.), теоретические подходы к разработке программ обучения математике (М.И. Башмаков, Г.В. Дорофеев, А.Г. Мордкович и др.), методика решения задач по подготовке к ЕГЭ (А.Ж. Жафяров, В.В. Мирошин и др.).

Цель работы: изучение свойства инвариантности и осмысление основных путей решения задач, содержащих инварианты.

Из поставленной цели следуют задачи:

1) определить понятие «инвариантность»;

2) изучить олимпиадные задачи, содержащие инвариант, и методы их решения;

3) рассмотреть использование инварианта при решении задач с параметрами;

4) исследовать уровень компетентности обучающихся в применении инвариантов.

Ключевой исследовательский вопрос: Способствует ли применение метода инвариантов повышению уровня компетентности обучающихся старших классов при решении задач повышенного уровня?

Гипотеза: Решение инвариантных задач позволяет повысить уровень подготовки учащихся старших классов к сдаче ЕГЭ и участию в конкурсах и олимпиадах по математике.

Объект: Математическое понятие «инвариантность».

Предмет: Решение задач с помощью метода инвариантов.

В качестве основных методов исследования я использую анализ литературы и моделирующий эксперимент.

Глава 1. Теоретические основы решения математических задач, содержащих инвариант

1.1. Понятие «инвариантность»

Инвариантность – свойство математических объектов (числового множества, выражения, функции, уравнения и т.д.) оставаться неизменными относительно некоторых преобразований. В некоторых задачах инвариант — это величина, которая изменяется монотонно, то есть только увеличивается или только уменьшается.[1]

Инвариантом некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании. Например, отношение линейных размеров подобных фигур или разность арифметической прогрессии. Инвариантом также могут обладать элементы какого-либо множества, например, вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, или множество всех углов, для каждого из которых справедливо основное тригонометрическое тождество. Инварианты присутствуют и в курсе физики: угол падения, равный углу отражения, скорость равномерного движения и т. п.[2]

Так же при решении некоторых задач используется понятие полуинварианта. Полуинвариант – это некоторая величина, которая в отличие от инварианта не остается неизменной, а увеличивается или уменьшается и может принимать при этом лишь конечное число различных значений. [3]

---

[1] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.: ОГИЗ, 1948 — С.30.

[2] Иванова Е. Ю. Олимпиадные задачи: методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ. М.: изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — С.10.

[3] Попов В. Л. Инвариант // Математическая энциклопедия, т.2. М.: Советская энциклопедия, 1979. — С.526.

1.2. Олимпиадные задачи, содержащие инвариант

«Задачи на отражение»

Задачи на инварианты - это большой слой задач олимпиадной тематике. Решение таких задач - достаточно сложный процесс, для удачного выполнения которого человек должен уметь думать, анализировать. Необходимо также доскональное знание фактического материала, владение общими подходами к решению задач, опыт в исследовании нестандартных задач.

Нельзя не согласиться с высказыванием известного американского математика Д. Пойа: «Если ученик заполнит отведенное ему учебное время только стандартными упражнениями, то он потеряет интерес, затормозит свой умственное развитие и потеряет свои возможности».

Среди разнообразия математических задач есть такие, которые можно объединить под рубрикой «Задачи на отражение». Их общая постановка формулируется так: «Есть множество А элементов a, b, c, ... произвольной природы и множество X родственных элементов x. y. z ... а также отображение, которое превращает элементы множества А в подобные им элементы.

Можно, прибегая к неоднократному преобразования элементов множества А с помощью отображения, получить тот или иной элемент из множества X? Ответ в этих задачах короткая - «да» или «нет». Конечно, задача считается решенной, если ответ обоснована. Для обоснования возражения часто используют инварианты: величины, соотношения, соответствия и т.д. - все то, что не меняется в процессе выполнения заданных в задаче преобразований.

Если заданный элемент или элементы из множества X не соответствуют этим величинам, не обладают соотношениями, не осуществляет соответствия, то эти элементы нельзя получить в результате преобразования заданных элементов множества А. Сохранение инвариантности является лишь необходимым условием достижения положительного результата[4]. Инварианты дают основание только для отрицательного ответа. Определив инвариант

[4] Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре, 2-е изд. М.: Наука, 2002. — С.9-10.

некоторого процесса во многих случаях можно выяснить вопрос о возможности определенного результата этого процесса.

При этом равенство инварианта в начале и в конце процесса еще не обеспечивает этой возможности. Поэтому, как правило, в таких задачах ответ на этот вопрос отрицательный. В качестве инварианта может применяться парность, остаток от деления на некоторое число и прочее. Понятие инвариантов, их выбор и применение рассмотрим при решении задач.

Задача 1.

На шахматной доске стоит черный слон и белая ладья. Белые ходят первыми. Доказать, что при правильной игре черные никогда не выиграют.

Решение: Слон всегда останется на полях одного цвета (это и есть инвариант данной задачи). Поэтому если тура каждым своим ходом будет останавливаться на поле другого цвета, ее невозможно будет побить.

Задача 2.

Было 4 листа бумаги. Некоторые из них разорвали на 4 части, затем некоторые из четвертинок снова разорвали на 4 частицы и т.д. Когда подсчитали общее полученное количество лоскутков, то оказалось, что их 2010. Правильно посчитали?[5]

Решение. Если постоянно считать полученное количество лоскутков после разрыва очередного листа, то их становится: 7, 10, 13, 16, ..., то есть после каждого очередного увеличения лоскутков их количество растет на 3. Остаток от деления всех этих чисел на 3 равен 1 и остается неизменной, то есть инвариантом. Поскольку остаток от деления 2010 на 3 равен 0, то есть посчитали неправильно.

Ответ: неправильно. В этой задачи элемент множества А - листы бумаги, отражение заключается в том, что разрывают лист или его части на 4 части, а элементами множества Х является количество образованных клочков бумаги.

[5] Бродский Я.С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика . М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. — С. 458.

Задача 3.

Пусть на доске написано число 500. За один ход можно или увеличить его на 15, или уменьшить на 3. Можно ли таким образом получить 1000?

Очень часто в задачах такого типа следует доказать невозможность существования решения — это может помочь найти его, если решение всё-таки существует. В этой задаче инвариантом будет являться остаток от деления на 3, ведь при изменении исходного числа 500 на 3 или 15 этот остаток не изменится ($3 \vdots 3$; $15 \vdots 3$). Однако остаток от деления 500 на 3 равен 2, а остаток от деления 1000 на 3 равен 1. Следовательно, нельзя в ходе данных преобразований из числа 500 получить число 1000

Задача 4.

На доске записаны числа 1, 2, 3, … , 1998. За один ход разрешается стереть любое количество чисел и вместо них записать остаток от деления их суммы на 11. Через несколько ходов на доске остались два числа, одно из которых – 1000. Найдите второе число (коллекция задач Турнира Ломоносова)[6]

1) При делении числа на 11 возможные остатки – это 1, 2, 3, … , 10 и, значит, 1000 не может быть таким остатком. Следовательно, второе число и есть остаток от деления суммы чисел на 11, то есть оно не может быть больше 10.

2) В этой задаче инвариантом является остаток первоначальной суммы чисел при делении на 11, так как для любых целых чисел a и b остаток от деления суммы $(a+b)$ на простое число p равен сумме остатков от деления каждого из чисел a и b на p

3) Остаток первоначальной суммы чисел при делении на 11 равен:

1+2+3+…+1998=1999×999=1999×(1000-1)=1999000-

1999=1997001=181545×11+6.

4) Остаток деления 1000 на 11 равен 10 (1000=90×11+10)

5) Пусть x - *второе число*, $0<x<10$, тогда $10+x=11\times k+6$, где k - целое число. Решением данного уравнения является всего одна пара $k=1$, $x=7$

[6] Кулыгин А. К. 33-й Турнир им. М. В. Ломоносова 26 сентября 2010 года. Задания. Решения. Комментарии. М.: МЦНМО, 2012. — С.12.

Задача 5.

Круг разбит на 6 равных секторов, в которых расставлены цифры 0, 1, 2, 0, 2, 1 (в указанном порядке). Разрешается за один ход одновременно добавлять одно и то же число до двух стоящих рядом числам. Можно за несколько таких ходов добиться того, чтобы все 6 чисел, стоящих в секторах, были равны?

Решение. Пусть на некотором шага в секторах оказались в последовательном порядке числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Составим такую сумму: S = a_1- a_2,+a_3-a_4+ a_5- a_6. После каждого хода она не меняется, поскольку каждая из разновидностей a_1- a_2;a_3-a_4; a_5- a_6 при увеличении уменьшаемого и вычитаемого на одно и то же число сохраняет свое значение, следовательно, данная сумма является инвариантом. Но в исходном положении S = 0 − 1 + 2 − 0 + 2 −1 = 2, а в конечном, когда каждое из шести чисел равна одному и тому же числу, S = 0. Поэтому сделать равными все шесть чисел нельзя.

Ответ: нельзя.

Задача 6.

На плоскости расположено 13 шестеренок, соединенных по кругу (первая шестеренка соединена со второй, вторая – с третьей, и т.д. тринадцатая шестеренка соединена с первой). Могут ли они вращаться?

Решение: Предположим, что первая шестеренка вращается по часовой стрелке, тогда, находящаяся в зацеплении с ней, вторая шестеренка должна вращаться против часовой стрелки. Третья – снова по часовой, четвертая – против часовой и т.д. Таким образом “нечетные” шестеренки должны вращаться в одну сторону, а “четные” – в другую. Но первая и тринадцатая шестеренки не могут вращаться в одном направлении, так как находятся в зацеплении между собой.

1.3. Инвариантность при решении задач с параметром

Решая ЕГЭ по математике, у большинства учеников вызывает трудность задача с параметром (№18), так как нет определенного алгоритма решения этого номера. Но стоит отметить, что инвариантность применяется во многих примерах такого типа, поэтому стоит рассмотреть данный метод подробнее.

С помощью инварианта решаются задачи, связанные с поиском всех значений параметра, при которых уравнение, неравенство или система имеют единственное или нечётное число решений

При решении задач можно рассматривать следующие инварианты:

1. «симметрия относительно знака переменной» (условие задачи не изменится, если заменить знак одной или нескольких переменных противоположным).

   Если f(x) – чётная функция, то уравнение f(x)=0 инвариантно относительно замены x на −x, так как f(x)=f(−x) =0
2. «симметрия относительно перестановки переменных» (условие задачи не изменится при перестановке переменных, либо при замене переменной на некоторое выражение с переменной).

   2.1 f(x)+f(c–x), где c – произвольное действительное число, не меняется при замене x на c–x, так как f(x)+f(c–x)=f(c–x)+f(c–c+x) $\Longrightarrow$ данное выражение инвариантно относительно такой замены

   2.2 f(x)+f($\frac{c}{x}$), где x≠0, а c – произвольное действительное число, не меняется при замене x на $\frac{c}{x}$, так как f(x)+f($\frac{c}{x}$)=f($\frac{c}{x}$)+f($\frac{c}{c/x}$) $\Longrightarrow$ данное выражение инвариантно такой замены

Алгоритм решения задач с параметрами с помощью инварианта:

1) проверить на инвариантность данное уравнение, неравенство, систему уравнений (неравенств);

2) установить, какое число может быть единственным решением;

3) подставить его в исходное уравнение, неравенство, систему уравнений (неравенств) и найти соответствующие значения параметра;

4) проверкой убедиться, что найденные значения параметра удовлетворяют условию задачи;

5) записать ответ

При решении используются следующие утверждения:

Утверждение 1. Если выражение $f(x)$ инвариантно относительно преобразования $x \to (-x)$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет корень x_0, то $-x_0$ также корень этого уравнения.

Утверждение 2. Если выражение $F(x, y)$ инвариантно относительно преобразования $x \to (-x)$ и уравнение $F(x, y) = 0$ имеет решение $(x_0; y_0)$, то и пара чисел $(-x_0; y_0)$ также решение этого уравнения.

Утверждение 3. Если выражение $F(x, y)$ инвариантно относительно преобразования $y \to (-y)$ и уравнение $F(x, y) = 0$ имеет решение $(x_0; y_0)$, то и пара чисел $(x_0; -y_0)$ также решение этого уравнения.

Утверждение 4. Если выражение $F(x, y)$ инвариантно относительно преобразования $y \to x$ и $x \to y$, а уравнение $F(x, y) = 0$ имеет решение $(x_0; y_0)$ то и пара чисел $(y_0; x_0)$ также решение этого уравнения.

Утверждение 5. Если выражение $f(x)$ инвариантно относительно преобразования $x \to g(x)$, уравнение $f(x) = 0$ имеет корень x_0, то $g(x_0)$ также корень этого уравнения.[7]

Рассмотрим примеры:

Пример 1 (МГУ, мехмат, 2000). При каких значениях a уравнение $x^2 + 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение?[8]

Решение.

1) Данное уравнение инвариантно при замене x на $-x$ в силу чётности x^2 и $(-x^2)$

$(-x)^2 + 2a\sin(\cos(-x)) + a^2 = 0$, то есть $x^2 + 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$.

2) Согласно утверждению 1, если x_0 – корень данного уравнения, то и $-x_0$ является корнем этого уравнения. Значит, $x_0 = -x_0 \Rightarrow x_0 = 0$.

3) Подставим $x_0 = 0$ в исходное уравнение

$$2a^{\sin 1} + a^2 = 0 \Leftrightarrow a\,(2^{\sin 1} + a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = -2\sin 1. \end{array}\right.$$

3) Проверим, имеет ли данное уравнение при найденных значениях a единственное решение:

а) при $a = 0$; $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ – единственное решение;

б) при $a = -2\sin 1$ получим:

$x^2 - 4\sin 1 \sin(\cos x) + 4\sin 1 = 0$

$x^2 + 4\sin 1(\sin 1 - \sin(\cos x)) = 0.$ (1)

Так как $-1 \le \cos x \le 1$, то $\sin(-1) \le \sin(\cos x) \le \sin 1$

$-\sin 1 \le \sin(\cos x) \le \sin 1 \;\big|\times(-1)$

$-\sin 1 \le -\sin(\cos x) \le \sin 1$

---

[7] Мирошин В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. М.:Экзамен, 2009. – С. 137

[8] Фалин Г. И., Фалин А. И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. М.: БИНОМ, 2010. – С.225.

$0 \le \sin 1 - \sin(\cos x) \le 2\sin 1;\ \sin 1 > 0 \Rightarrow$ левая часть уравнения (1) неотрицательна, а правая – равна 0.

Значит, уравнение (1) равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 = 0, \\ \sin 1 - \sin(\cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \sin 1 - \sin(\cos 0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0$ – единственное решение уравнения.

Ответ: $a = 0;\ a = -2\sin 1$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ \end{cases}$ имеет четыре различных решения.

Решение.

Из вида системы следует, что $a > 0$.

1) Данная система инвариантна относительно замены $x \to -x$ и $y \to -y$

2) Согласно утверждениям 2 и 3, если $(x_0; y_0)$ решения данной системы, то и пары чисел $(-x_0; y_0)$, $(x_0; -y_0)$ и $(-x_0; -y_0)$ также являются решениями данной системы

3) Найдем решения при $x_0 \ge 0,\ y_0 \ge 0$.

Построим график каждого из уравнений:

1. График первого уравнения $|x|+|y|=a$ – точки сторон квадрата АВСД
2. График второго уравнения $x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2}$ – окружность с центром в начале координат и радиусом, равным $\frac{1}{a}$.

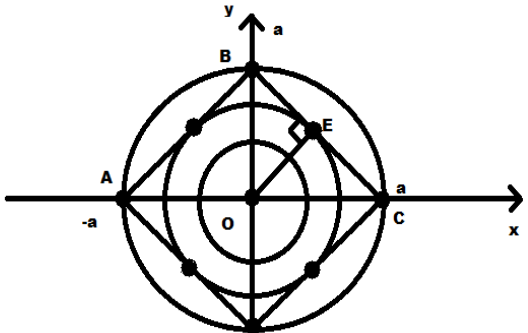


Рис. 2. Графики уравнений

4) Из графика функций видно, что система имеет ровно четыре решения в двух случаях:

1. $a = \frac{1}{a^2} \Rightarrow a^3 = 1;\ a = 1;$
2. $\frac{1}{a}$ = OE, где OE - радиус окружности, вписанной в квадрат. OE= $\frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, тогда $\frac{1}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a^2\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a^2 = \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt[4]{2}$

Ответ: $a = 1;\ a = \sqrt[4]{2}$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a при каждом из которых уравнение $\sqrt{(x+7)^4+(a-5)^4} = |x+a+2|+|x-a+12|$ имеет единственный корень

Решение

1) Данное уравнение инвариантно относительно замены x на $-x-14$

$\sqrt{(-x-14+7)^4+(a-5)^4} = |-x-14+a+2|+|x-14-a+12|$

$\sqrt{(-x-7)^4+(a-5)^4} = |-x+a-12|+|-x-2-a|$

2) Согласно утверждению 5, если x_0 корень данного уравнения, то и g(x) также является корнем этого уравнения $\Longrightarrow x_0 = -x_0-14 \Longrightarrow x_0 = -7$

3) Подставим $x_0 = -7$ в исходное уравнение:

$(a-5)^2 = 2|a-5|$

$$|a-5|^2=2|a-5| \Leftrightarrow \begin{bmatrix}|a-5|=0\\|a-5|=2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}a=5\\a=3\\a=7\end{bmatrix}$$

4) Проверим, имеет ли данное уравнение при найденных значениях а единственное решение

а) $a=5$

$$(x+7)^2=2|x+7|$$

$$|x+7|^2=2|x+7| \Leftrightarrow ¿\begin{bmatrix}|x+7|=0\\|x+7|=2\end{bmatrix} \Leftrightarrow ¿\begin{bmatrix}x=-7\\x=-9\\x=-5\end{bmatrix} ¿$$

Значит, при $a=5$ уравнение имеет больше одного корня

б) $a=3;7$ (так как значение уравнения при данных a одинаковое)

$$\sqrt{(x+4)^4+2^4}=|x+5|+|x+9|$$

Раскроем модуль:

1. $x\geq -5$

   $$\sqrt{(x+7)^4+16}=2(x+7)$$

   $$(x+7)^4-4(x+7)^2+16=0$$

Пусть $(x+7)^2=t\geq 0 \Longrightarrow t^2-4t+16=0$; данное уравнение не имеет корней в силу отрицательности дискриминанта

2. $-9\leq x<-5$

   $$\sqrt{(x+7)^4+16}=4$$

   $$(x+7)^4=0 \Longrightarrow x=-7$$

3. $x<-9$

   $$\sqrt{(x+7)^4+16}=2(x+7)$$

   $$(x+7)^4-4(x+7)^2+16=0$$

Пусть $(x+7)^2=t\geq 0 \Longrightarrow t^2-4t+16=0$; данное уравнение не имеет корней в силу отрицательности дискриминанта

Значит, при $a=3$ *и* $a=7$ данное уравнение имеет единственный корень

Ответ: 3;7

Пример 4. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2006, июль, №6). Найти все значения параметра а, при которых уравнение $\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$ имеет нечетное число решений. [9]

Решение.

1) Данное уравнение инвариантно при замене x на $-x$. Действительно, при замене x на $-x$ получается уравнение

$$\left|\frac{(-x)(2^{-x}-1)}{2^{-x}+1}+2a\right|=a^2+1$$

которое после умножения числителя и знаменателя дроби в левой части на 2^x превращается в исходное:

$$\left|-\frac{x(1-2^x)}{1+2^x}+2a\right|=a^2+1 \Leftrightarrow \left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$$

2) Согласно утверждению 1, если x_0 – корень данного уравнения, то и $-x_0$ является корнем этого уравнения. Значит, $x_0=-x_0 \Rightarrow x_0=0$.

3) Подставим $x_0=0$ в исходное уравнение

$$|2a|=a^2+1$$

$$(|a-1|)^2=0 \Leftrightarrow a=\pm 1$$

4) Данное уравнение только при найденных значениях a может иметь нечетное число решений. Для этих значений a множество корней исходного

[9] Фалин Г. И., Фалин А. И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. М.: БИНОМ, 2010. – С.225.

уравнения имеет вид (если это множество – конечно): $\{0, \pm x_1, \pm x_2, \ldots \pm x_n\}$, где числа x_1, x_2, . . ., x_n – положительные числа, поэтому число корней обязательно нечетно, а если же корней бесконечно много, то говорить, что их число нечетно нельзя. Следовательно, для завершения решения задачи достаточно выяснить: конечно или нет число корней исходного уравнения для найденных значений параметра, $a = 1$ и $a = -1$.

а) $a = 1$

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=0 \quad (1)\\ \frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=-4 \quad (2)\end{array}\right.$$

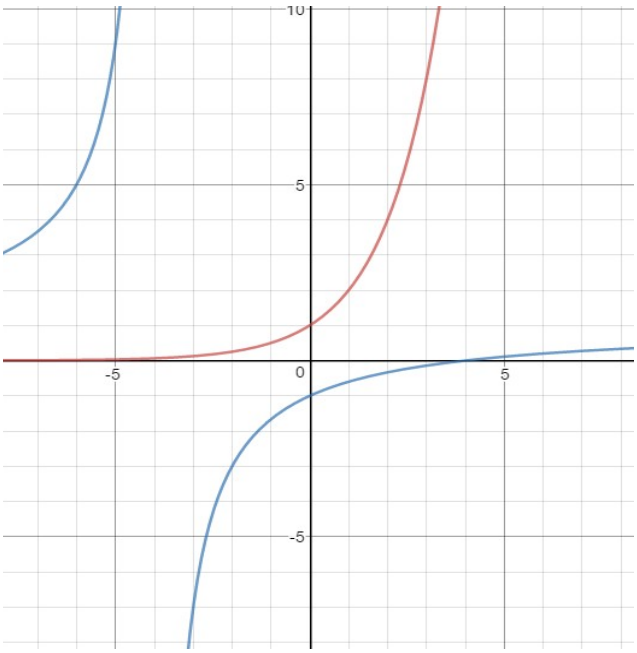
(1) $\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=0 \Leftrightarrow \left[\text{¿}\, 2^x \neq -1 \Leftrightarrow x=0\right.$

(2) Решим данное уравнение графически:

$$\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=-4 \Leftrightarrow (x+4)2^x = x-4 \Leftrightarrow 2^x=\frac{x-4}{x+4}$$

$y=2^x$- показательная функция, которая монотонно возрастает и проходит через точку (0;1)

$y=\frac{x-4}{x+4}$ − – гипербола, проходящая через точку (0;−1), с вертикальной асимптотой $x=-4$ и горизонтальной асимптотой $y=1$



Данные графики не пересекаются $\Longrightarrow$ второе уравнение не имеет корней

При a = 1 уравнение имеет только 1 корень ($x=0$)

б) $a=-1$

$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}-2\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=0\ (1)\\ \frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=4\ (2)\end{array}\right.$$

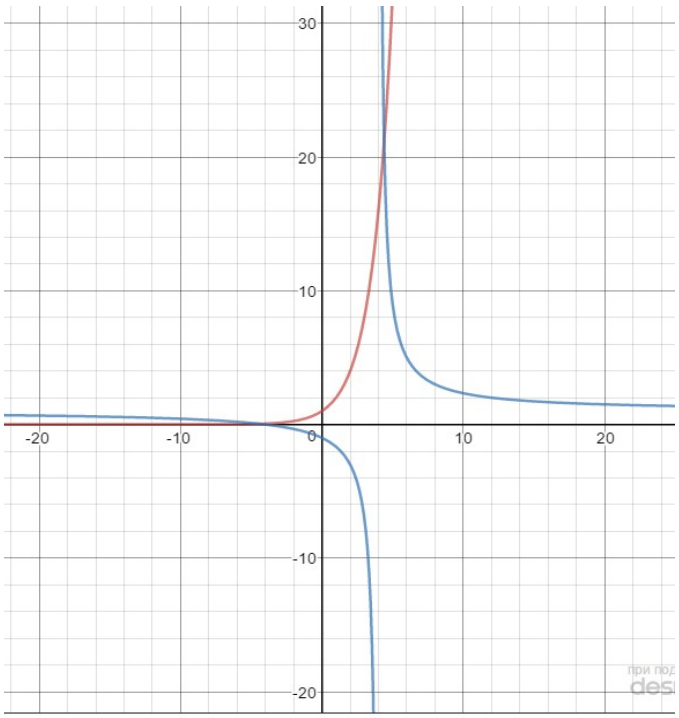
(1) $\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2^x\neq -1\\ x=0\end{array}\right.$

(2) Решим данное уравнение графически:

$$\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}=4 \Leftrightarrow (x-4)2^x=x+4 \Leftrightarrow 2^x=\frac{x+4}{x-4}$$

$y=2^x$- показательная функция, которая монотонно возрастает и проходит через точку (0;1)

$y=\frac{x+4}{x-4}$ – – гипербола, проходящая через точку (0;−1), с вертикальной асимптотой $x=4$ и горизонтальной асимптотой $y=1$



Изобразив эти графики на рисунке, видно, что они пересекаются в двух точках. Точные значения корней второго уравнения нам совершенно не важны, но графики позволяют локализовать эти корни: $-5 < x_1 < -4,\ \ 4 < x_2 < 5$

При $a = -1$ исходное уравнение имеет ровно 3 корня.

Ответ: $a = -1$; $a = 1$

Пример 5. (МГУ, экономический ф-т (отд. кибернетики), 2003, №6)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3 \times 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$ имеет единственное решение[10]

Решение:

[10] Фалин Г. И., Фалин А. И. Инвариантность и задачи с параметрами // Квант. – 2007. – №5. – С.46.

1) Данная система инварианта относительно замены x *на* $(-x)$

$\begin{cases} 3\times 2^{|-x|}+5|-x|+4=3y+5(-x)^2+3a \\ (-x)^2+y^2=1 \end{cases}$ так как $|-x|=x, (-x)^2=x^2$, эта система тождественна исходной

2) Согласно утверждению 2, если $(x_0;y_0)$ решение данной системы, то и пара чисел $(-x_0;y_0)$ также является решением этой системы $\Longrightarrow$ если система имеет единственное решение, то это решение имеет вид $(0;y)$

3) Подставим $x_0=0$ в исходную систему

$\begin{cases} 3y+3a=7 \\ y^2=1 \end{cases}$ данная система имеет два решения

1. $\begin{cases} y=1 \\ a=\frac{4}{3} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y=-1 \\ a=\frac{10}{3} \end{cases}$

4) Проверим, имеет ли данная система при найденных значениях a единственное решение:

а) $a=\frac{4}{3}$

$\begin{cases} 3\times 2^{|x|}+5|x|=3y+5x^2 \ (1) \\ x^2+y^2=1 \ (2) \end{cases}$

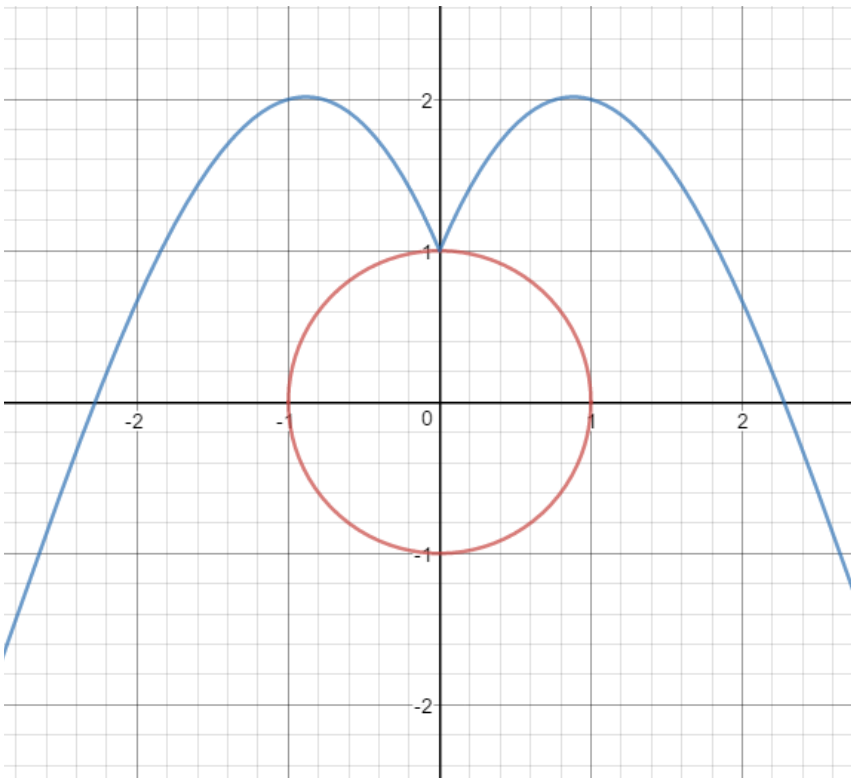
Решим данную систему графически:

- $x^2+y^2=1$ – окружность с центром в начале координат и радиусом 1
- $f(x)=2^{|x|}+\frac{5}{3}(|x|-x^2)$ – данный график построить достаточно сложно, но в данном случае нас интересует только пересечение данного графика с единичной окружностью, поэтому можно обойтись схематичным построением:

  1) $f(x)$- четная функция

  2) $f(0)=1; f(1)=2$

  3) при $x\in(0;1) \Longrightarrow f(x)=2^x+\frac{5}{3}x(1-x)>2^x>1$



б) $a=\frac{10}{3}$

$$\begin{cases} 3\times 2^{|x|}+5|x|=3y+5x^2+6 \quad (1) \\ x^2+y^2=1 \quad (2) \end{cases}$$

Решим данную систему графически:

- $x^2+y^2=1$ – окружность с центром в начале координат и радиусом 1
- $g(x)=2^{|x|}+\frac{5}{3}(|x|-x^2)-2$ – как и предыдущем случае, нас интересует схематичный вид графика для $x\in[-1;1]$, так как вне этого отрезка он не может пересекаться с единичной окружностью.:

  1) $g(x)$- четная функция

  2) $g(0)=-1; g(1)=0; g(-1)=0$

Уже из этих точек ясно, что $g(x)$ пресекается с единичной окружностью по меньшей мере в трех точках (0; −1), (1; 0), (−1; 0) $\Longrightarrow$ при $a=\frac{10}{3}$ единственной точки пересечения нет, поэтому данное значение параметра не подходит.

Ответ: $a=\frac{4}{3}$

Глава 2. Исследование уровня компетентности обучающихся в применении инвариантов

2.1. Исследование первоначального уровня

В исследовании принимали участие учащиеся 11-ого класса Лицея НИУ ВШЭ в количестве 15 человек.

Для определения уровня компетентности обучающихся в применении инвариантов им была предложена задача со вступительных экзаменов в МГУ 2007 год (см. приложение 1). Обучающимся необходимо было решить данную задачу и выбрать один из способов решения:

- инвариант;
- другой способ.

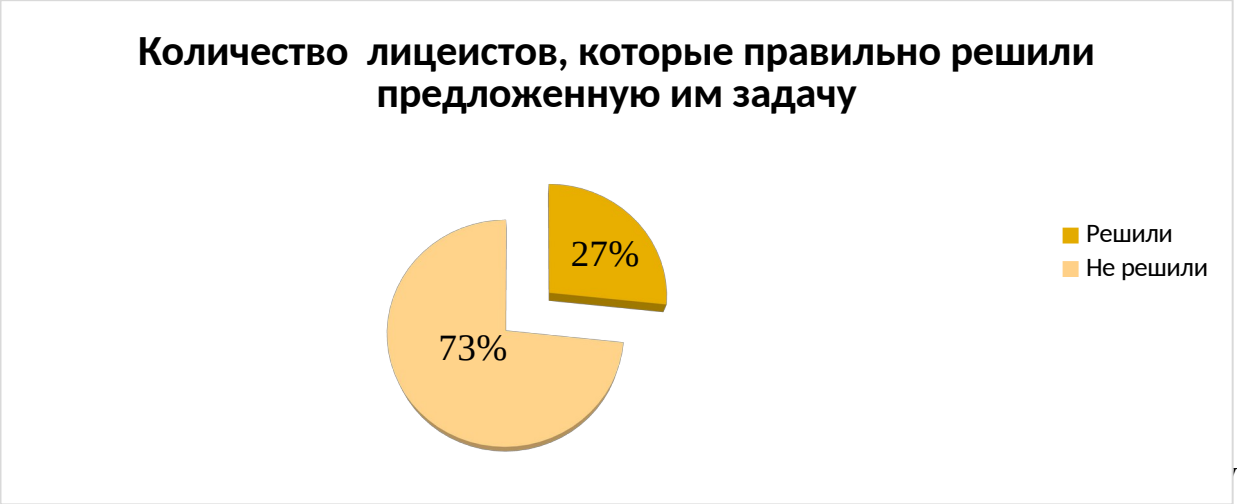
Результат исследования представлен на рис. 1.



Рис. 1. Использованные способы решения задач

Из представленных данных видно, что 80% учащихся не применяли инварианты при решении задач.

27% лицеистов отдали предпочтение другим способам – графическому и алгебраическому (метод подстановки), а половина опрошенных (53%) не смогла найти способ решения.



тю им задачу

По результатам представленной диаграммы видим, что только 27% лицеистов решили задачу правильно, из них 3 человека решали задачу с помощью инварианта, а 1 лицеист применил графический метод.

В общей доле выполнения работы процент решенных задач с помощью инварианта представлен на рис. 3.

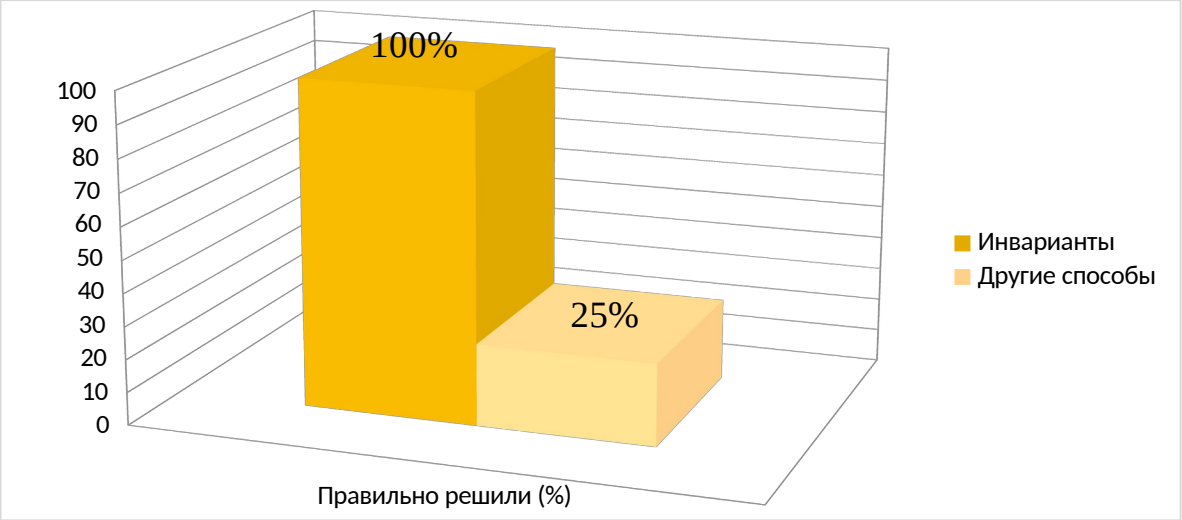


Рис. 3. Доля правильно решенных задач с помощью инварианта

Задачи с использованием способа инвариант решены правильно на 100%, в отличие от других способов.

Таким образом, мы наблюдаем необходимость повышения уровня компетентности обучающихся в применении инвариантов при решении задач, что несомненно позволит повысить уровень подготовки учащихся старших классов к сдаче ЕГЭ и участию в олимпиадах по математике.

С этой целью лицеистам в течение пары была представлена основная информация об инвариантах при решении олимпиадных задач и задач с параметром (глава 1).

Этот материал является нетрудным для восприятия, так как лицеисты, обучающиеся на профильной математике, были частичной ознакомлены с этой темой в процессе занятий в 11 классе, поэтому предоставленного времени хватило на изучение темы «Инвариантность» и разбор данного метода на практике.

2.2. Повторное исследование (контрольный эксперимент)

В конце лекции лицеистам была предложена задача из пробного варианта ЕГЭ за 2016 год (см. приложение 2). При повторном исследовании были получены следующие результаты, представленные на рис. 4.

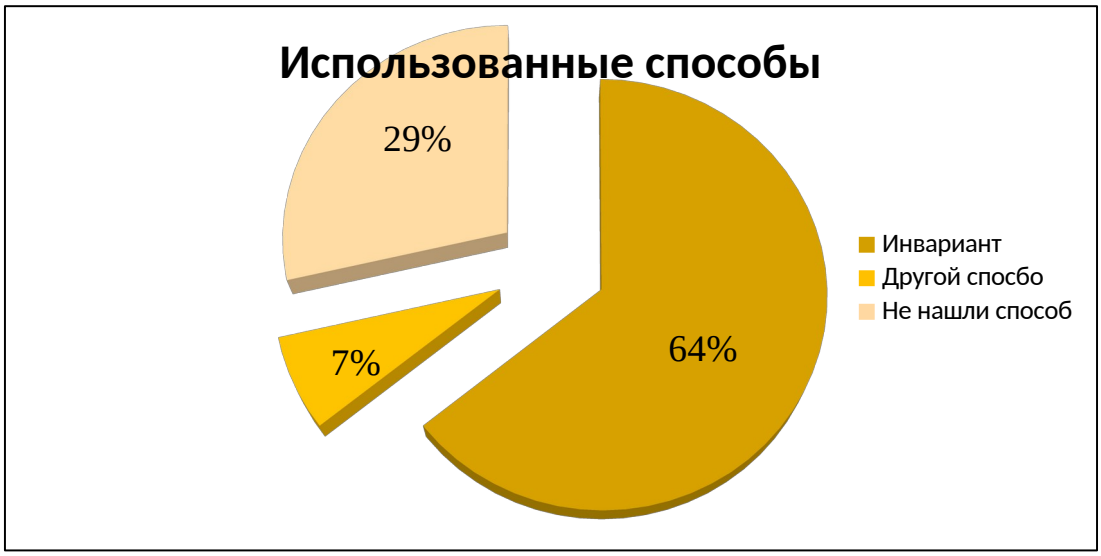


Рис. 4. Использованные способы решения задач

Из полученных результатов видно, что 64% учащихся (9 человек) применили инварианты при решении задач. Этому способу обучающиеся отдали наибольшее предпочтение, другим способом при решении предложенной задачи воспользовались 7% (2 человека) и 29% (4 человека) не смогли найти способ решения.

Процент правильности решенной задачи представлен на рис. 5.

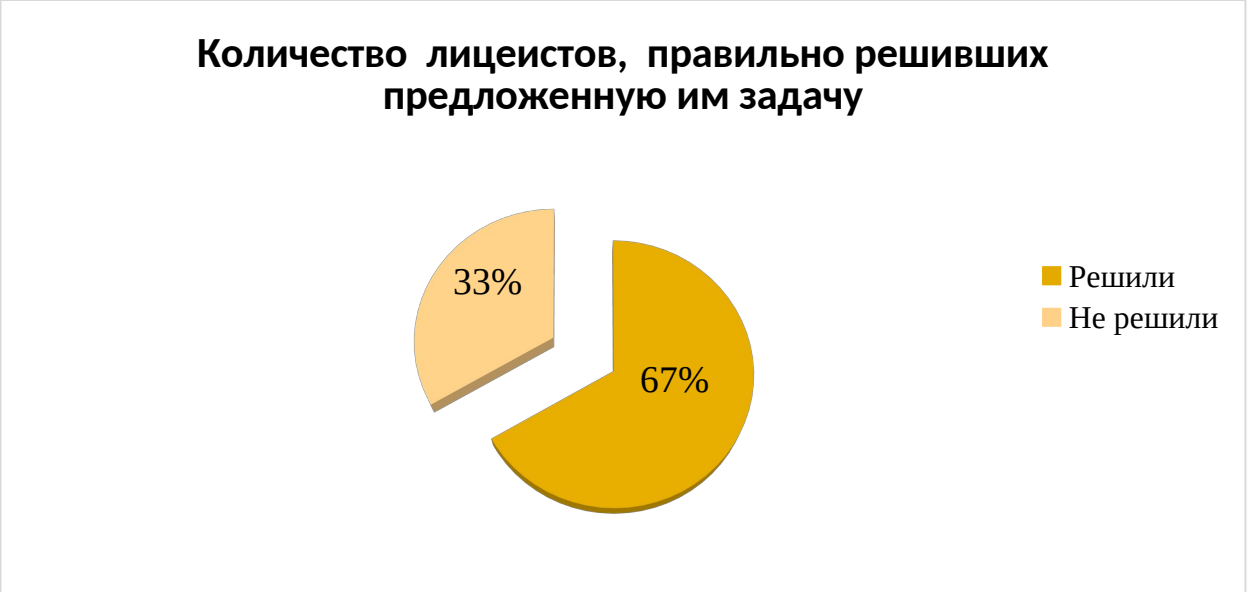


Рис. 5. Количество лицеистов, которые правильно решили предложенную им задачу

Таким образом, знакомство обучающихся с основными теоретическими положениями метода инвариантов приводит к следующим результатам:

- сократилось время решения задач;
- были найдены рациональные пути решения, практически исключающие ошибку;
- открываются пути решения задач олимпиадного уровня.

Кроме того, анализируя решения задач, я пришла к выводу, что основными навыками, влияющими на частоту и успешность применения инвариантов, являются:

1. анализ;
2. правильное восприятие условий задачи;
3. опыт решения задач.

Заключение

I. Целью работы являлось изучение свойства инвариантности и осмысление основных путей решения задач, содержащих инварианты.

II. Для достижения поставленной цели в работе были решены следующие задачи:

1) определено и изучено понятие «инвариантность»;

2) проанализированы олимпиадные задачи, содержащие инвариант, и методы их решения;
3) рассмотрено использование инварианта при решении задач с параметрами;
4) исследован уровень компетентности обучающихся в применении инвариантов.

III. Результаты практического исследования:

1) После проведения занятия по изучению основной теоретических положений темы «Инвариантность» и применению данного метода на практике 64% учащихся применили инварианты при решении задач (на первоначальном этапе исследования было 20%). Значительное увеличение количества обучающихся, обратившихся к методу инвариантов, доказывает продуктивность данного метода. Четкий алгоритм выполнения заданий весомо упрощает процесс решения математических задач.
2) Процент правильно решенных задач увеличился с 27% до 67%. Резкое увеличение процента качества при выполнении математических задач с помощью метода инвариантов связано со значительным упрощением исходного примера, уменьшением математических вычислений и, как следствие, сведение вероятности ошибки при выполнении заданий к минимуму.
3) Основными навыками, влияющими на частоту и успешность применения инвариантов, являются:
   - анализ;
   - правильное восприятие условий задачи;
   - опыт решения задач.

Таким образом, гипотеза о том, что решение инвариантных задач позволяет повысить уровень подготовки учащихся старших классов к сдаче ЕГЭ и участию в конкурсах и олимпиадах по математике, подтверждена.

Приложение 1.

(МГУ, мех-мат, устный экзамен 2007) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases}$$ имеет два различных решения

Решение.

1) Преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} 2xy-ax-2ay+a^2-2=0 \\ 4x^2+4y^2-8ax-4ay-7a^2-20a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2y-a)-a(2y-a)-2=0 \\ 4(x^2-2ax)+(4y^2-4ay)-7a^2-20a=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2y-a)(x-a)=2 \\ 4(x-a)^2+(2y-a)^2=12a^2+20a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(y-\frac{a}{2}\right)(x-a)=2 \\ 4(x-a)^2+4\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=12a^2+20a \end{cases}$$

2) Пусть $u=x-a;v=y-\frac{a}{2}$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} vu=1 \\ u^2+v^2=3a^2+5a \end{cases}$$

Данная систем имеет такое же число решений сколько и исходная, так как между парами $(x;y)u(u;v)$ имеется взаимнооднозначное соответствие.

3) Данная система инварианта относительно замены

$$\begin{cases} v & (-v) \\ u & (-u) \end{cases}; \begin{cases} v & u \\ u & v \end{cases} u \begin{cases} v & (-u) \\ u & (-v) \end{cases}$$

4) Согласно утверждению 2,3,4, если $(u_0;v_0)$ решения данной системы, то и пары чисел $(-u_0;-v_0)$; $(v_0;u_0)$ и $(-v_0;-u_0)$ также будут являться решением системы

5) В силу первого уравнения u_0 и v_0 отличны от 0, поэтому из четырех пар $(u_0;v_0)$; $(-u_0;-v_0)$; $(v_0;u_0)$ и $(-v_0;-u_0)$ пары $(u_0;v_0)$ и $(-u_0;-v_0)$, а также пары $(v_0;u_0)$ и $(-v_0;-u_0)$ различны $\Rightarrow$ система может иметь два решения только в том случае, если $u_0=v_0$

6) Подставим пару $(u;u)$ в систему :

$$\begin{cases} u^2=1 \\ 2u^2=3a^2+5a \end{cases} 2=3a^2+5a \Leftrightarrow a=\frac{1}{3};a=-2$$

7) Так как $2=3a^2+5a \Rightarrow \begin{cases} vu=1 \ (1) \\ u^2+v^2=2 \ (2) \end{cases}$

- Из (1) уравнения выразим $v=\frac{1}{u}$ подставим полученное значение во (2).
- Получим, биквадратное уравнение: $u^4-2u^2+1=0 \Leftrightarrow (u^2-1)^2=0$

$\Leftrightarrow u=\pm 1 \Rightarrow$ эта система имеет два решения $(-1;-1)$ и $(1;1)$

8) Условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет уравнению $2=3a^2+5a \Rightarrow a=\frac{1}{3}; a=-2$ Ответ: $a=\frac{1}{3}; a=-2$

Приложение 2.

(ЕГЭ, 2016 год, пробный вариант) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка $(x;y;z)$ действительных чисел x, y, z удовлетворяющая системе уравнение

$$\begin{cases} x^7+(4-x)^7=2y^7 \\ (x-2)^2+(y-2)^2+z^2+a^2=9 \\ 6yz^2-(a-3)zy^2+6-2a=0 \end{cases}$$

Решение:

1) Данная система инвариантна относительно замены x *на* $4-x$

$$\begin{cases} (4-x)^7+x^7=2y^7 \\ (4-x-2)^2+(y-2)^2+z^2+a^2=9 \\ 6yz^2-(a-3)zy^2+6-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^7+(4-x)^7=2y^7 \\ (x-2)^2+(y-2)^2+z^2+a^2=9 \\ 6yz^2-(a-3)zy^2+6-2a=0 \end{cases}$$

2) Согласно утверждению 5, если x_0 корень данного уравнения, то и g(x) также является корнем этого уравнения $\Rightarrow x_0=-x_0+4 \Rightarrow x_0=2$

3) Подставим $x_0=-2$ в исходную систему:

$$\begin{cases} 2^7+(4-2)^7=2y^7 \ (1) \\ (2-2)^2+(y-2)^2+z^2+a^2=9 \ (2) \\ 6yz^2-(a-3)zy^2+3-a=0 \ (3) \end{cases}$$

Из (1) уравнения данной системы $\Rightarrow 2\cdot 2^7=2y^7 \Rightarrow y=2$

При $x=2$ и $y=2$ система примет вид:

$$\begin{cases} z^2+a^2=9 \\ 12z^2-4(a-3)z+6-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2+a^2=9 \ (4) \\ 6z^2-2(a-3)z+3-a=0 \ (5) \end{cases}$$

- Из (4) уравнения следует, что $a^2\le 9$
- Уравнение (5) является квадратным относительно z, поэтому чтобы оно имело хотя бы один корень его дискриминант должно быть неотрицательным $\Rightarrow D=a^2-9\ge 0 \Rightarrow a^2\ge 9$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a^2\le 9 \\ a^2\ge 9 \end{cases} \Rightarrow a=\pm 3$$

5) Проверим, имеет ли данная система при найденных значения параметра a единственное решение:

- Подставим $a=\pm 3$ в уравнение $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2+a^2=9 \Rightarrow$

$$(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

а) при $a=3$ уравнение $6yz^2-(a-3)zy^2+6-2a=0$ истинно

б) при $a=-3$ уравнение $6yz^2-(a-3)zy^2+6-2a=0$ ложно

$$\Downarrow$$

$$a = 3$$

Ответ: $a = 3$

Список литературы

Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. (2002) Симметрия в алгебре, 2-е изд. М.: Наука.

Бродский Я.С. (2008) Статистика. Вероятность. Комбинаторика. М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование».

Вайнтрауб М. А. (1997) Математическая логика. К.: ВИПОЛ.

Вейль Г. (1947) Классические группы, их инварианты и представления //пер. с англ. М.: Государственное издательство иностранной литературы.

Гуревич Г. Б. (1948) Основы теории алгебраических инвариантов. М.: ОГИЗ.

Двейрин М.З. (2001) Выбор наилучшего варианта. Донецк: ДонНУ.

*Жафяров А. Ж. (*2010) Математика. ЕГЭ. Решение задач уровня С3: учебное пособие. Новосибирск: Сибирское университетское издательство.

Иванова Е. Ю. (2008) Олимпиадные задачи: методическая разработка для учащихся заочного отделения ММФ. М.: изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ.

Кулыгин А. К. (2012) 33-й Турнир им. М. В. Ломоносова 26 сентября 2010 года. Задания. Решения. Комментарии. М.: МЦНМО.

Мирошин В. В. (2009) Решение задач с параметрами. Теория и практика. М.: Экзамен.

Попов В. Л. (1979) Инвариант // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия.

Фалин Г. И., Фалин А. И. (2010) Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. М.: БИНОМ.

Фалин Г. И., Фалин А. И. Инвариантность и задачи с параметрами // Квант. – 2007. – №5. – С. 45-47.

Шестаков С. А. (2017) ЕГЭ 2017. Математика. Задачи с параметром. М.: МЦНМО.