РЕФЕРАТ

Расчетно-пояснительная записка 54 с., 2 рис., 10 источников.

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТ.....2
ВВЕДЕНИЕ.....4
1 Управление запасами.....5
1.2 Классическая модель управления запасами.....6
1.3 Оптимальный план.....8
1.4 Практическая часть.....14
2 Статистические методы управления качеством продукции.....18
2.1 Качество продукции в современных условиях.....18
2.2 О сертификации.....19
2.3 О развитии статистических методов сертификации в России.....21
2.4 Основы теории статистического контроля.....24
2.5 Планы статистического контроля и правила принятия решений.....27
2.6. Практическое применение статистического контроля.....34
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....53
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....54

ВВЕДЕНИЕ

1 Управление запасами

Управление запасами (другими словами, материально-техническое снабжение) – неотъемлемая часть работы фирм и организаций. Речь идет о запасах сырья, топлива, материалов, инструментов, комплектующих изделий, полуфабрикатов, готовой продукции на промышленном (или сельскохозяйственном) предприятии, о запасах товаров на оптовых базах, складах магазинов, на рабочих местах продавцов, наконец, у потребителей. Запасы постоянно расходуются и пополняются по тем или иным правилам, принятым на предприятии. Оптимизация этих правил, т.е. оптимальное управление запасами, дает большой экономический эффект.

Математическая теория управления запасами является крупной областью экономико-математических исследований, получившей свое развитие в основном начиная с пятидесятых годов. Предложенная, видимо, еще в 1915 г. Ф.Харрисом классическая модель теории управления запасами, называемая также моделью Вильсона (в связи с тем, что получила известность после публикации работы Р.Г.Вильсона в 1934 г.), является одним из наиболее простых и наглядных примеров применения математического аппарата для принятия решений в экономической области. В то же время формула оптимального размера заказа, полученная в модели Вильсона, широко применяется на различных этапах производства и распределения продукции, поскольку оказывается практически полезной для принятия решений при управлении запасами, в частности, приносящей заметный экономический эффект [1]. Рассмотрим эту модель подробнее.

1.2 Классическая модель управления запасами

Пусть $y(t)$ – величина запаса некоторого товара на складе в момент времени t, $t \geq 0$. Дефицит не допускается, т.е. $y(t) \geq 0$ при всех t. Товар пользуется равномерным спросом с интенсивностью μ, т.е. за интервала времени Δt со склада извлекается и поступает потребителям часть запаса величиной $\mu \Delta t$. В моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2,… пополняется запас на складе – приходят поставки величиной Q_0, Q_1, Q_2,… соответственно. Таким образом, изменение во времени величины запаса $y(t)$ товара на складе изображается зубчатой ломаной линией (рис.1), состоящей из наклонных и вертикальных звеньев, причем наклонные отрезки параллельны:

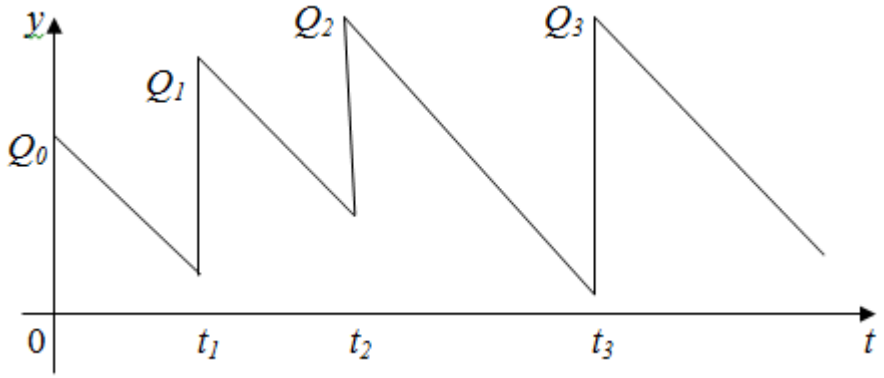

Рис. 1. График изменения величины запаса на складе

Таким образом, в момент t_i величина запаса на складе $y(t)$ скачком увеличивается на Q_i. Следовательно, функция $y(t)$ имеет разрывы в точках t_1, t_2,… Для определенности будем считать, что эта функция непрерывна справа.

Пусть s – плата за хранение единицы товара в течение единицы времени. Поскольку можно считать, что величина запаса $y(t)$ не меняется в течение

интервала времени *(t; t+dt)*, где *dt* – дифференциал, т.е. бесконечно малая, то плата за хранение всего запаса в течение этого интервала времени равна *sy(t)dt*. Следовательно, затраты за хранение в течение интервала времени [0;*T*), где *T* – интервал планирования, пропорциональны (с коэффициентом пропорциональности *s*) площади под графиком уровня запаса на складе *y(t)* и равны:

$$s\int_0^T y(t)\,dt$$

Пусть *g* – плата за доставку одной партии товара. Примем для простоты, что она не зависит от размера поставки. Позже покажем, что если эта плата равна $g+g_1Q$, где *Q* – размер поставки, то оптимальный план поставки – тот же, что и при отсутствии линейного члена. Будет проанализирована и более сложная модель, в которой предусмотрена скидка с ростом поставки, приводящая к выражению $g+g_1Q+ g_2Q^2$ для платы за доставку одной партии товара размером *Q*.

Пусть *n(T)* – количество поставок, пришедших в интервале [0;*T*). При этом включаем поставку в момент $t = 0$ и не включаем поставку в момент $t = T$ (если такая происходит). Тогда суммарные издержки на доставку товара равны *gn(T)*. Следовательно, общие издержки (затраты, расходы) за время *T* равны:

$$F(T;y)=F\left(y(t),0\le t<T\right)=gn(T)+s\int_0^T y(t)\,dt$$

Запись $F(T;y)=F\left(y(t),0\le t<T\right)$ означает, что общие издержки зависят от значений функции *y=y(t)* при всех $0\le t<T$. Символ y обозначает функцию как целое. Другими словами, область определения *F(T;y)* при фиксированном *T* – не множество чисел, а множество функций.

Общие издержки, очевидно, возрастают при росте горизонта планирования Т. Поэтому часто используют средние издержки, приходящиеся на единицу времени. Средние издержки за время Т равны:

$$F(T;y)=F\left(y(t),0\le t<T\right)=\frac{1}{T}F(T;y)=\frac{1}{T}\left\{gn(T)+s\int_0^T y(t)\,dt\right\}$$

Поскольку товар отпускается со склада с постоянной интенсивностью (скоростью), дефицит не допускается, то доходы от работы склада пропорциональны горизонту планирования, средние доходы постоянны. Следовательно, максимизация прибыли эквивалентна минимизации издержек или средних издержек.

Если задать моменты прихода поставок и величины партий, то будет полностью определена функция $y=y(t)$ при всех $0 \le t < T$. Верно и обратное – фиксация функции $y=y(t)$, $0 \le t < T$, рассматриваемого вида (рис.1) полностью определяет моменты прихода поставок и величины партий. И то, и другое будем называть *планом* поставок или планом работы системы управления запасами. Для ее оптимизации необходимо выбрать моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2,… пополнения запаса на складе и размеры поставляемых партий товара Q_0, Q_1, Q_2,… так, минимизировать средние издержки $f_T(y)$ при фиксированном T. Модель производственной ситуации (т.е. работы склада) описывается четырьмя параметрами - μ (интенсивность спроса), s (стоимость хранения единицы продукции в течение единицы времени), g (стоимость доставки партии товара), T (горизонт планирования).

Поставленная задача оптимизации работы склада интересна тем, что неизвестно число $2n(T)-1$ параметров, определяющих план поставок. Поэтому ее решение не может быть проведено с помощью стандартных методов теории оптимизации.

Решим эту задачу в три этапа. На первом установим, что оптимальный план следует искать среди тех планов, у которых все зубцы доходят до оси абсцисс, т.е. запас равен 0 в момент доставки очередной партии. Цель второго этапа – доказать, что все зубцы должны быть одной и той же высоты. Наконец, на третьем находим оптимальный размер поставки.

1.3 Оптимальный план

Найдем наилучший план поставок. План, для которого запас равен 0(т.е. *y(t)* = 0) в моменты доставок очередных партий, назовем *напряженным.*

Утверждение 1. Для любого плана поставок, не являющегося напряженным, можно указать напряженный план, для которого средние издержки меньше.

Покажем, как можно от произвольного плана перейти к напряженному, уменьшив при этом издержки. Пусть с течением времени при приближении к моменту t_1 прихода поставки Q_1 уровень запаса не стремится к 0, а лишь уменьшается до $y(t_1 - \neq 0)$(где знак «минус» означает предел слева функции *y(t)* в точке t_1). Тогда рассмотрим новый план поставок с теми же моментами поставок и их величинами, за исключением величин поставок в моменты $t = 0$ и $t = t_1$. А именно, заменим Q_0на $Q_{01} = Q_0 - y(t_1 - \neq 0)$, а Q_1 на $Q_{11} = Q_0 + y(t_{1-})$. Тогда график уровня запаса на складе параллельно сдвинется вниз на интервале $(0; t_1)$, достигнув 0 в t_1, и не изменится правее точки t_1. Следовательно, издержки по доставке партий не изменятся, а издержки по хранению уменьшатся на величину, пропорциональную (с коэффициентом пропорциональности *s*) площади параллелограмма, образованного прежним и новым положениями графика уровня запаса на интервале $(0; t_1)$ (см. рис.2).

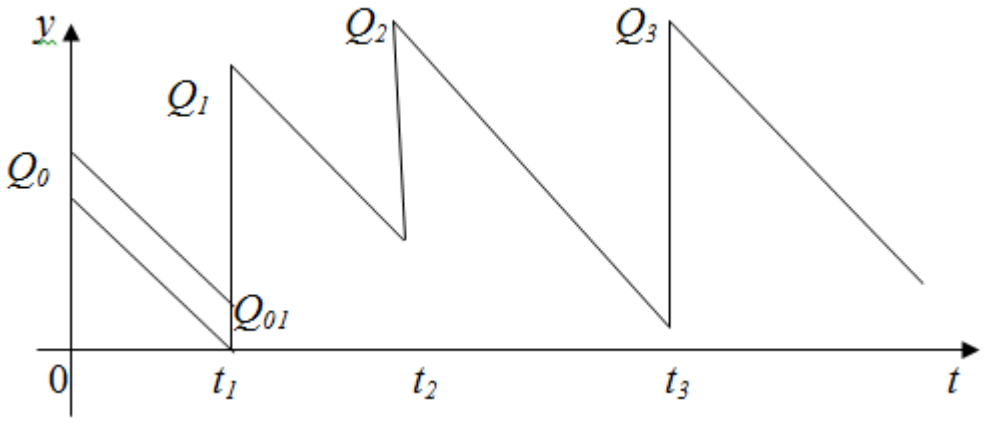

Рис. 2. Первый шаг перехода к напряженному плану

Итак, в результате первого шага перехода получен план, в котором крайний слева зубец достигает оси абсцисс. Следующий шаг проводится

аналогично, только момент времени $t = 0$ заменяется на $t = t_1$. Если есть такая возможность, второе наклонное звено графика уровня запаса на складе параллельно сдвигается вниз, достигая в крайней правой точке t_2 оси абсцисс. Аналогично поступаем со всеми остальными зубцами, двигаясь слева направо. В результате получаем напряженный план. На каждом шагу издержки по хранению либо сокращались, либо оставались прежними (если соответствующее звено графика не опускалось вниз). Следовательно, для полученного в результате описанного преобразования напряженного плана издержки по хранению меньше, чем для исходного плана, либо равны (если исходный план уже являлся напряженным).

Из утверждения 1 следует, что оптимальный план следует искать только среди напряженных. Другими словами, план, не являющийся напряженным, не может быть оптимальным.

Утверждение 2. Среди напряженных планов с фиксированным числом поставок минимальные издержки имеет тот, в котором все интервалы между поставками равны.

При фиксированном числе поставок затраты на доставку партий не меняются. Следовательно, достаточно минимизировать затраты на хранение.

Для напряженных планов размеры поставок однозначно определяются с помощью интервалов между поставками:

$$Q_{i-1} = \mu(t_i - t_{i-1}),\ i = 1,2,\ldots,n(T)-1,\ Q_{n(T)-1} = \mu(T - t_{n(T)-1})$$

Действительно, очередная поставка величиной Q_{i-1} совпадает с размером запаса на складе в момент t_{i-1}, расходуется с интенсивностью μ единиц товара в одну единицу времени и полностью исчерпывается к моменту t_i прихода следующей поставки.

Для напряженного плана издержки по хранению равны

$$s\int_0^T y(t)\,dt = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{Q_{i-1}(t_i - t_{i-1})}{2} = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{\mu(t_i - t_{i-1})^2}{2} = s\sum_{i=1}^{n(T)} \frac{\mu\Delta_i^2}{2} = \frac{\mu s}{2}\sum_{i=1}^{n(T)} \Delta_i^2,$$

Где $\Delta_i = t_i - t_{i-1},\ i = 1,2,\ldots,n(T),\ t_{n(T)} = T$. Ясно, что $\Delta_i, i = 1,2,\ldots,n(T)$ - произвольные неотрицательные числа, в сумме составляющие *T*. Следовательно, для минимизации издержек среди напряженных планов с фиксированным числом поставок достаточно решить задачу оптимизации:

$$\begin{cases} \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2 \to min, \\ \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n = T, \\ \Delta_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,n, \end{cases}$$

где *n = n(T).*

Полученная задача оптимизации формально никак не связана с логистикой, она является чисто математической. Для ее решения целесообразно ввести новые переменные $\alpha_i = \Delta_i - \frac{T}{n},\ i = 1,2,\ldots,n.$

Тогда:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta_i - \frac{T}{n} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \right) - n\frac{T}{n} = T - T = 0$$

Поскольку $\Delta_i = \frac{T}{n} + \alpha_i$, то $\Delta_i^2 = \frac{T^2}{n^2} + 2\frac{T}{n}\alpha_i + \alpha_i^2$, следовательно, с учетом предыдущего равенства имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = n\frac{T^2}{n^2} + 2\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \frac{T^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \ .$$

Сумма квадратов всегда неотрицательна. Она достигает минимума, равного 0, когда все переменные равны 0, т.е. при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$

Тогда:

$$\Delta_i = \frac{T}{n},\ i = 1,2,\ldots,n.$$

При этих значениях Δ_i выполнены все ограничения оптимизационной задачи. Итак, утверждение 2 доказано.

Для плана с равными интервалами между поставками все партии товара имеют одинаковый объем. Для такого плана издержки по хранению равны

$$s\int_0^T y(t)dt = \frac{\mu s}{2}\sum_{i=1}^{n(T)}\Delta_i^2 = \frac{\mu s T^2}{2n(T)}.$$

Средние издержки (на единицу времени) таковы:

$$f(T;y) = \frac{1}{T}\left\{gn(T) + \frac{\mu s T^2}{2n(T)}\right\} = g\frac{n(T)}{T} + \mu s\frac{T}{2n(T)}.$$

Итак, минимизация средних издержек – это задача дискретной оптимизации. На третьем этапе построения оптимального плана необходимо найти натуральное число *n(T)* – самое выгодное число поставок.

Поскольку к моменту T запас товара должен быть израсходован, то общий объем поставок за время T должен совпадать с общим объемом спроса, следовательно, равняться μT. Справедливо балансовое соотношение (аналог закона Ломоносова-Лавуазье сохранения массы при химических реакциях):

$$Qn(T) = \mu T.$$

Из балансового соотношения следует, что

$$\frac{n(T)}{T} = \frac{\mu}{Q}.$$

Средние издержки (на единицу времени) можно выразить как функцию размера партии Q:

$$f(T;y) = g\frac{n(T)}{T} + \mu s\frac{T}{2n(T)} = f_1(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2}. \quad (1)$$

Задача состоит в минимизации $f_1(Q)$ по Q. При этом возможная величина поставки принимает дискретные значения, $Q \in \left\{\frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,...\right\}$.

Изучим функцию $f_1(Q)$, определенную при $Q>0$. При приближении к 0 она ведет себя как гипербола, при росте аргумента – как линейная функция. Производная имеет вид

$$\frac{df_1(Q)}{dQ} = -\frac{\mu g}{Q^2} + \frac{s}{2}. \quad (2)$$

Производная монотонно возрастает, поэтому рассматриваемая функция имеет единственный минимум в точке, в которой производная равна 0, т.е. при

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}. \quad (3)$$

Получена знаменитая «формула квадратного корня». В литературе иногда без всяких комментариев рекомендуют использовать напряженный план, в котором размеры всех поставляемых партий равны Q_0. К сожалению, получаемый таким путем план почти всегда не является оптимальным, т.е. популярная рекомендация неверна или не вполне корректна. Дело в том, что почти всегда $Q_0 \notin \left\{\frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,...\right\}$.

Всегда можно указать неотрицательное целое число n такое, что

$$Q_1 = \frac{\mu T}{n+1} < Q_0 \le \frac{\mu T}{n} = Q_2. \quad (4)$$

Утверждение 3. Решением задачи оптимизации

$$f_1(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2} \to \min,$$

$$Q \in \left\{\frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,...\right\}$$

является либо Q_1, либо Q_2.

Действительно, из всех $Q \in \left\{\frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,...\right\}$ часть лежит правее Q_0, из них наименьшим является Q_2, а часть лежит левее Q_0, из них наибольшим является Q_1. Для построения оптимального плана обратим внимание на то, что производная (2) отрицательна левее Q_0 и положительна правее Q_0, следовательно, функция средних издержек $f_1(Q)$ убывает левее Q_0 и возрастает правее Q_0. Значит, минимум по $Q \in \left\{\frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,...\right\} \cap \{Q : Q \ge Q_0\}$ достигается при Q

= Q_2, а минимум по $Q \in \left\{ \frac{\mu T}{n}.\ n = 1,2,... \right\} \cap \{Q : Q < Q_0\}$ - при $Q = Q_1$ Последнее утверждение эквивалентно заключению утверждения 3.

Итак, алгоритм построения оптимального плана таков.

1. Найти Q_0 по формуле квадратного корня (3).

2. Найти n из условия (4).

3. Рассчитать $f_1(Q)$ по формуле (1) для $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$, где Q_1 и Q_2 определены в (4).

4. Наименьшее из двух чисел $f_1(Q_1)$ и $f_1(Q_2)$ является искомым минимумом, а то из Q_1 и Q_2, на котором достигается минимум – решением задачи оптимизации. Обозначим его Q_{opt} .

Оптимальный план поставки – это напряженный план, в котором объемы всех поставок равны Q_{opt}.

Замечание. Если $f_1(Q_1) = f_1(Q_2)$, то решение задачи оптимизации состоит из двух точек Q_1 и Q_2. В этом частном случае существует два оптимальных плана.

1.4 Практическая часть

Рассмотрим следующую задачу: на складе хранится некоторая продукция, пользующаяся равномерным спросом. За 1 день со склада извлекается 5 т продукции. Плата за хранение 1 т. продукции в день – 50 руб. Плата на доставку одной партии – 980 руб. Горизонт планирования – 10 дней. Найти оптимальный план поставок.

В рассматриваемом случае μ=5 (т/день), s=50 (руб./т·день), g=980 (руб./партия), T = 10 (дней). По формуле (3) рассчитываем

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 980}{50}} = \sqrt{196} = 14.$$

Множество допустимых значений для Q имеет вид

$$\left\{ \frac{\mu T}{n},\ n = 1,2,... \right\} = \left\{ 50;\ \frac{50}{2};\ \frac{50}{3};\ \frac{50}{4};... \right\} = \{50;\ 25;\ 16{,}67;\ 12{,}5;...\}.$$

Следовательно, Q_1 = 12,5 и Q_2 = 16,67. Первое значение определяет напряженный план с четырьмя одинаковыми зубцами, а второе – с тремя. Поскольку

$$f_1(Q) = \frac{5 \times 980}{Q} + \frac{50Q}{2} = \frac{4900}{Q} + 25Q,$$

то

$$f_1(Q_1) = f_1(12,5) = \frac{4900}{12,5} + 25 \times 12,5 = 392 + 312,5 = 704,5$$

и

$$f_1(Q_2) = f_1(50/3) = \frac{4900 \times 3}{50} + 25 \times \frac{50}{3} = 294 + 416,67 = 710,67.$$

Поскольку $f_1(Q_1) < f_1(Q_2)$, то $Q_{opt} = Q_1$ = 12,5. Итак, оптимальным является напряженный план с четырьмя зубцами.

Как уже отмечалось, часто рекомендуют применять план поставок с $Q=Q_0$. Каков при этом проигрыш по сравнению с оптимальным планом?

Для плана с $Q=Q_0$ интервал между поставками составляет $Q_0/\mu = 14/5 = 2,8$ дня. Следовательно, партии придут в моменты t_0 = 0; t_1= 2,8; t_2 = 5,6; t_3 = 8,4. Следующая партия должна была бы придти уже за пределами горизонта планирования T =10, в момент t_4 = 11,2. Таким образом, график уровня запаса на складе в пределах горизонта планирования состоит из трех полных зубцов и одного не полного. К моменту T =10 пройдет 10 – 8,4 = 1,6 дня с момента последней поставки, значит, со склада будет извлечено $5 \times 1,6 = 8$ т продукции и останется 14 – 8 = 6 т. План с $Q=Q_0$ не является напряженным, а потому не является оптимальным для горизонта планирования T =10.

Подсчитаем общие издержки в плане с $Q=Q_0$. Площадь под графиком уровня запаса на складе равна сумме площадей трех треугольников и трапеции. Площадь треугольника равна $\frac{14 \times 2,8}{2} = 19,6,$ трех треугольников – 58,8. Основания трапеции параллельны оси ординат и равны значениям уровня запаса в моменты времени t_3 = 8,4 и T =10, т.е. величинам 14 и 6 соответственно. Высота трапеции лежит на оси абсцисс и равна 10 – 8,4 = 1,6, а

потому площадь трапеции есть $\frac{(14+6)\times 1{,}6}{2}=16.$ Следовательно, площадь под графиком равна 58,8 + 16 = 74,8, а плата за хранение составляет $50\times 74{,}8=3740$ руб.

За 10 дней доставлены 4 партии товара (в моменты $t_0 = 0$; $t_1 = 2{,}8$; $t_2 = 5{,}6$; $t_3 = 8{,}4$), следовательно, затраты на доставку равны $4\times 980=3920$ руб. Общие издержки за 10 дней составляют 3740+3920 = 7660 руб., а средние издержки – 766 руб. Они больше средних издержек в оптимальном плане в 766/704,5 = 1,087 раза, т.е. на 8,7%.

Отметим, что

$$f_1(Q_0)=\frac{4900}{Q_0}+25Q_0=\frac{4900}{14}+25\times 14=350+350=700,$$

т.е. меньше, чем в оптимальном плане. Таким образом, из-за дискретности множества допустимых значений средние издержки возросли на 4,5 руб., т.е. на 0,64%. При этом оптимальный размер партии (12,5 т) отличается от $Q_0 = 14$ т на 1,5 т, т.е. $Q_{opt}/\ Q_0 = 0{,}89$ – различие на 11%. Достаточно большое различие объемов поставок привело к пренебрежимо малому изменению функции $f_1(Q)$. Это объясняется тем, что в точке Q_0 функция $f_1(Q)$ достигает минимума, а потому ее производная в этой точке равна 0.

Оба слагаемых в $f_1(Q_0)$ равны между собой. Случайно ли это? Покажем, что нет. Действительно,

$$\frac{\mu g}{Q_0}=\frac{\mu g}{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}}=\sqrt{\frac{\mu g s}{2}};\ \frac{sQ_0}{2}=\frac{s\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}}{2}=\sqrt{\frac{\mu g s}{2}}.$$

Таким образом, составляющие средних издержек, порожденные различными причинами, уравниваются между собой.

Средние издержки с плане с $Q=Q_0$ равны $\sqrt{2\mu g s}$. Интервал между поставками при этом равен

$$\frac{Q_0}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{2\mu g}{s}}}{\mu} = \sqrt{\frac{2g}{\mu s}}.$$

Издержки в течение одного интервала между поставками таковы:

$$\sqrt{2\mu g s} \times \sqrt{\frac{2g}{\mu s}} = 2g,$$

при этом половина (т.е. g) приходится на оплату доставки партии, а половина – на хранение товара.

2 Статистические методы управления качеством продукции

Одна из наиболее важных областей статистических методов, приносящая к тому же наибольший доход - это обеспечение качества, основанное на применении статистического моделирования. Статистическим методам управления качеством и сертификации и посвящен этот раздел.

Сначала дадим общие сведения о месте статистических методов в принятии решений при управлении качеством и сертификации продукции. Затем рассмотрим статистический контроль качества и продемонстрируем его высокую экономическую эффективность.

2.1 Качество продукции в современных условиях

Слова "сертификация", "международные стандарты ИСО (т.е. разработанные *International Standardization Organization* - Международной организацией по стандартизации, сокращенно *ISO*, по-русски - ИСО) серии 9000 по системам качества" уже навязли в зубах. Менее осознано в нашей стране, что управление качеством - прежде всего применение современных методов статистического моделирования. На Западе (США) и на Востоке (Япония) это - аксиома. Вот типичное высказывание японского менеджера и инженера: "Методы статистики - именно то средство, которое необходимо изучить, чтобы внедрить управление качеством. Они - наиболее важная составная часть комплексной

системы всеобщего управления качеством на фирме. В японских корпорациях все, начиная от председателя Совета Директоров и до рядового рабочего в цехе, обязаны знать хотя бы основы статистических методов". Так считает Каору Исикава, президент промышленного института Мусаси, заслуженный профессор Токийского университета [2, с.15].

Раз все японские работники знают про статистические методы - значит, их научили в школе. Во всем мире - в США, Японии и Ботсване - школьники учат статистические методы как один из обязательных школьных предметов, вместе с физикой, химией, математикой и историей. ЮНЕСКО регулярно проводит конференции по преподаванию статистики в средней школе. И вот всем виден результат - качество компьютеров IBM и японских телевизоров. Справедливости ради надо отметить, что популярные ныне международные стандарты ИСО серии 9000 ничем принципиально не отличаются от давних документов КС УКП[1], а в некоторых отношениях КС УКП были более прогрессивными, чем нынешние стандарты ИСО 9000.

Очевидно, овладение основами статистического контроля качества продукции - неотъемлемая часть образования менеджера и инженера.

2.2 О сертификации

Сертификация - это официальная гарантия поставки производителем продукции, удовлетворяющей установленным требованиям. Поставщики и продавцы должны иметь сертификаты качества на предлагаемые ими товары и услуги. Маркетинг включает в себя работы по сертификации.

За новыми терминами зачастую скрываются хорошо известные понятия, несколько модернизированные в соответствии с современной обстановкой. Так, целесообразно связать комплексную систему управления качеством продукции с маркетингом: "маркетинг в широком смысле - это

---

[1] В 1970-е и 1980-е годы в СССР активно разрабатывались КС УКП - Комплексные Системы Управления Качеством Продукции. Имелись областные варианты - горьковская, львовская, днепропетровская и иные системы качества.

усовершенствованная, ориентированная на рыночную экономику КС УКП" [3,с.61].

Есть несколько уровней сертификации. Говоря о сертификации продукции, могут иметь в виду качество конкретной её партии. В ряде случаев это оправдано - рядового потребителя интересует качество лишь той единицы продукции, которую он сам приобрёл. Однако установление долговременных хозяйственных связей целесообразно лишь в случае, когда поставщик гарантирует высокое качество не одной, а всех партий своей продукции. Очевидно, для этого должны быть проведены оценка и сертификация технологических процессов и производств, обеспечивающих выпуск этой продукции.

Ещё больше повышается доверие к поставщику, если не только отдельные технологические процессы, но и всё предприятие в целом гарантированно выпускает продукцию высокого качества. Это обеспечивается действующей на предприятии системой качества, удовлетворяющей требованиям Международной организации по стандартизации, выраженным в системе стандартов ИСО 9000.

В условиях рыночной экономики основная характеристика товара - его конкурентоспособность. Очевидно, производителю необходимо уметь оценивать конкурентоспособность перед запуском продукции в производство или началом работы по продвижению на зарубежный рынок. Одним из основных компонентов конкурентоспособности является технический уровень продукции. Фирма, обладающая патентом или новой научно-технической разработкой, имеет более высокий излишек производителя по сравнению с другими фирмами. При принятии решений о выборе направления инвестиционных вложений одна из основных учитываемых характеристик - технический уровень продукции.

Из сказанного вытекает, что сертификация продукции - это современная форма управления качеством продукции. На Западе общепринято, что основная составляющая в управлении качеством продукции - это статистические методы

(см., например, отчет Комитета ИСО по изучению принципов стандартизации [4]). В нашей стране внедрение комплексных систем управления качеством (КС УКП), надо признать, сводилось во многом к подготовке документации организационного характера. Статистические методы использовались в промышленности недостаточно, а государственные стандарты по этой тематике зачастую содержали грубейшие ошибки.

Подготовка предприятий к сертификации продукции, технологических процессов и производств, систем качества требует приложения труда квалифицированных специалистов, причем в достаточно большом объеме. Подобную работу обычно проводят специализированные организации.

2.3 О развитии статистических методов сертификации в России

Более 150 лет статистические методы применяются в России для проверки соответствия продукции установленным требованиям, т.е. для сертификации. Так, еще в 1846 г. действительный член Петербургской академии наук М.В. Остроградский рассматривал задачу статистического контроля партий мешков муки или штук сукна армейскими поставщиками. С тех пор в России в статистическом контроле качества было сделано многое, особенно в области теории: Так, монографии проф. Ю.К. Беляева и проф. Я.П. Лумельского можно смело назвать классическими. Был выпущен и длинный ряд практических руководств, в основном переводных.

С начала 1970-х годов стали разрабатываться государственные стандарты по статистическим методам. В связи с обнаружением в них грубых ошибок 24 из 31 государственного стандарта по статистическим методам были отменены в 1986-87 гг. К сожалению, потеряв правовую силу как нормативные документы, ошибочные стандарты продолжают использоваться как научно-технические издания.

В 1989 г. был организован Центр статистических методов и информатики (ЦСМИ) для работ по развитию и внедрению современных статистических методов. Уже к середине 1990 г. ЦСМИ были разработаны 7 диалоговых систем

по современным статистическим методам управления качеством, а именно, СПК, АТСТАТ-ПРП, СТАТКОН, АВРОРА-РС, ЭКСПЛАН, ПАСЭК, НАДИС.

Параллельно ЦСМИ вел работу по объединению статистиков. В апреле 1990 г. в Большом Актовом Зале Московского Энергетического института прошла Учредительная конференция Всесоюзной организации по статистическим методам и их применениям. На Учредительном съезде Всесоюзной статистической ассоциации (ВСА) в октябре 1990 г. в Московском экономико-статистическом институте эта организация вошла в состав ВСА в качестве секции статистических методов. В 1992г. после развала СССР и фактического прекращения работы ВСА на основе секции статистических методов ВСА организована Российская ассоциация по статистическим методам (РАСМ), а затем и Российская академия статистических методов, существующие и в настоящее время. Коллективными усилиями разработан единый подход к проблемам принятия решений в сертификации и управлении качеством на основе применения современных статистических методов.

Статистический контроль - это выборочный контроль на научной основе. Контроль качества продукции всем знаком хотя бы по названию - им обычно занимается отдел технического контроля (ОТК) предприятия. Есть различные виды контроля - входной контроль, приемочный контроль (готовой продукции), и контроль при передаче полуфабрикатов и комплектующих из цеха в цех. Кроме сплошного контроля всех изделий подряд применяют выборочный, когда о качестве партии продукции судят по результатам контроля некоторой части - выборки.

Зачем нужен выборочный контроль? Чтобы проверить качество спички - надо чиркнуть ею. Загорится - должное качество, не загорится - брак. Но повторно однажды зажженную спичку использовать уже нельзя. Поэтому партию спичек можно контролировать только выборочно. Партии консервов, лампочек, патронов - тоже. Т.е. при разрушающем контроле необходимо пользоваться выборочными методами и судить о качестве партии продукции по результатам контроля её части - выборки.

Выборочные методы контроля могут применяться и из экономических соображений, когда стоимость контроля высока по сравнению со стоимостью изделия. Например, вряд ли целесообразно визуально проверять качество каждой скрепки в каждой коробке.

Для проведения выборочного контроля необходимо сформировать выборку, выбрать план контроля. А если план имеется - полезно знать его свойства. Анализ и синтез планов проводят с помощью математического моделирования на основе теории вероятностей и математической статистики, применяя компьютерные диалоговые системы (пакеты программ).

Компьютерные диалоговые системы позволяют, прежде всего, проводить анализ и синтез планов контроля. Пусть перед Вами - ГОСТ на продукцию, в нем есть раздел "Правила приемки" с планами контроля. Хороша эта система планов или плоха? С помощью диалоговых систем Вы найдете характеристики конкретного плана, приемочный и браковочный уровни дефектности (см. ниже) и т.д. Можно провести и синтез планов, т.е. компьютер поможет принять решение в новых условиях - подберет план, удовлетворяющий Вашим условиям.

Российской ассоциацией статистических методов были проанализированы сотни стандартов на конкретную продукцию (разделы "Правила приемки") и ГОСТы по статистическим методам. Обнаружено, что более половины и тех и других стандартов содержат грубые ошибки, пользоваться ими нельзя. Применение современных статистических методов позволяет в среднем вдвое сократить трудозатраты на контрольные операции (как известно, они составляют расходуют примерно 10% от себестоимости машиностроительной продукции). Следовательно, от повышения эффективности решений менеджеров на основе внедрения современных статистических методов обеспечения качества продукции Россия может получить более 5 миллиардов долларов США дополнительного дохода в год.

Приведем ещё два сообщения о высокой экономической эффективности статистического контроля. "Мы документально зафиксировали экономию от

применения методов статистического контроля и методов принятия решений, которым обучили наших сотрудников. Мы приближаемся к степени окупаемости около 30 долларов на 1 вложенный доллар. Вот почему мы получили такую серьезную поддержку от высшего руководства", - сообщает Билл Виггенхорн, ответственный за подготовку специалистов фирмы "Моторола" (цитируем по статье [5]).

По подсчетам профессора Массачусетского технологического института Фримена (см. монографию [6]), только статистический приемочный контроль давал промышленности США 4 миллиарда долларов в 1958 г. (это более 22 миллиардов долларов в ценах 2003 г.), т.е. 0,8% ВВП - валового внутреннего продукта.

2.4 Основы теории статистического контроля

Выборочный контроль, построенный на научной основе, т.е. исходящий из теории вероятностей и математической статистики, называют статистическим контролем. Организатора производства и менеджера выборочный контроль может интересовать не только в связи с качеством продукции, но и в связи, например, с контролем экологической обстановки, поскольку зафиксированные государственными органами экологические нарушения влекут штрафы и иные "неприятные" последствия. К выборочному контролю вынуждены прибегать при аудиторской проверке организации, поскольку сплошной анализ всего массива документов бухгалтерского или управленческого учета весьма трудоемок, а потому практически невозможен. Обсудим основные идеи статистического контроля.

При статистическом контроле решение о генеральной совокупности – об экологической обстановке в данном регионе или о партии продукции - принимается по выборке, состоящей из некоторого количества единиц (отдельных документов бухгалтерского или управленческого учета, единиц экологического контроля или единиц продукции). Следовательно, выборка должна представлять партию, т.е. быть репрезентативной (представительной).

Как эти слова понимать, как проверить репрезентативность? Ответ может быть дан лишь в терминах вероятностных моделей выборки (см. главу 1).

Как известно, наиболее часто применяют биномиальную и гипергеометрическую модели. В первой из них предполагается, что результаты контроля n рассматриваемых единиц можно рассматривать как совокупность n независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2,....,X_n$, где $X_i = 1$, если i-ое измерение показывает, что имеется нарушение, т.е. превышено ПДК (предельная норма концентрации) или i-ое изделие дефектно, и $X_i = 0$, если это не так. Тогда число X превышений ПДК (при другой интерпретации - дефектных единиц продукции в партии) равно

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n . \qquad (1)$$

Из формулы (1) и Центральной Предельной Теоремы теории вероятностей вытекает, что при увеличении объема выборки n распределение X сближается с нормальным распределением. Известно, что распределение X имеет вид

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1—p)^{n-k} , \qquad (2)$$

где C_n^k - число сочетаний из n элементов по k, а p —уровень дефектности (в другой предметной области - в экологии - доля превышений ПДК в генеральной совокупности), т.е. $p = P(X_i = 1)$. Как известно, формула (2) задает биномиальное распределение.

Вторая модель - гипергеометрическая - соответствует случайному отбору единиц в выборку. Пусть среди N единиц, составляющих генеральную совокупность, имеется D дефектных. Случайность отбора означает, что каждая единица имеет одинаковые шансы попасть в выборку. Более того, ни одна пара единиц не имеет преимущества перед любой другой парой при отборе в выборку. То же самое — для троек, четверок и т.д. Итак, каждое из C_N^n сочетаний по n единиц из N имеет одинаковую вероятность быть отобранным в качестве выборки, равную, очевидно, $1/C_N^n$.

Отбор случайной выборки согласно описанным правилам организуют при проведении различных лотерей. Пусть Y —число дефектных единиц в такой

выборке. Известно, что тогда $P(Y = k)$ – гипергеометрическое распределение, т.е.

$$P(Y = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{D-k}}{C_N^n}. \qquad (3)$$

Известно, что биномиальная и гипергеометрическая модели *весьма близки*, когда объем генеральной совокупности (партии) по крайней мере в 10 раз превышает объем выборки, т.е.

$$P(X = k) = P(Y = k), \qquad (4)$$

если объем выборки мал по сравнению с объемом партии. При этом в качестве p в формуле (4) берут D/N.

Близость результатов, получаемых с помощью биномиальной и гипергеометрической моделей, весьма важна с методологической точки зрения. Дело в том, что эти модели исходят из принципиально различных модельных предпосылок. В биномиальной модели случайность *присуща каждой единице* - она с какой-то вероятностью дефектна, а с какой-то - годна. В то же время в гипергеометрической модели качество определенной единицы детерминировано, задано, а случайность проявляется лишь *в отборе*, вносится инженером, экологом или экономистом при составлении выборки. .

Соотношение (4) показывают, что во многих случаях нет необходимости выбирать одну из моделей, поскольку обе дают близкие численные результаты. Отличия проявляются при обсуждении вопроса о том, какую выборку считать *представительной*. Является ли таковой выборка, составленная из 20 изделий, лежащих сверху в первом вскрытом ящике? В биномиальной модели вполне допустим ответ "да", в гипергеометрической - только "нет".

Биномиальная модель легче для теоретического изучения, поэтому будем её рассматривать в дальнейшем. Однако при реальном контроле лучше формировать выборку, исходя из гипергеометрической модели. Это делают, выбирая номера изделий (для включения в выборку) с помощью датчиков псевдослучайных чисел на ЭВМ или с помощью таблиц псевдослучайных

чисел. Алгоритмы формирования выборки встраивают в современные программные продукты по статистическому контролю.

2.5 Планы статистического контроля и правила принятия решений

Под планом статистического контроля понимают алгоритм, т.е. правила действий при контроле. На «входе» при этом - генеральная совокупность (партия продукции), а на «выходе» - одно из двух решений: «принять партию» либо «забраковать партию». Рассмотрим несколько примеров.

Одноступенчатые планы контроля (n,c): отобрать выборку объема n; если число дефектных единиц в выборке X не превосходит c, то партию принять, в противном случае забраковать. Число c называется «приемочным числом».

Частные случаи: план (n,0) —партию принять тогда и только тогда, когда все единицы в выборке являются годными; план (n,1) - партия принимается, если в выборке все единицы являются годными или ровно одно - дефектное, во всех остальных случаях партия бракуется.

Двухступенчатый план контроля (n, a, b) + (m, c): отобрать первую выборку объема n; если число дефектных единиц в первой выборке X не превосходит a, то партию принять; если число дефектных единиц в первой выборке X больше или равно b, то партию забраковать; во всех остальных случаях, т.е. когда X больше a, но меньше b, следует взять вторую выборку объема m; если число дефектных единиц во второй выборке Y не превосходит c, то партию принять, в противном случае забраковать.

Рассмотрим в качестве примера план (20, 0, 2) + (40, 0). Сначала берется первая выборка объема 20. Если все единицы в ней - годные, то партия принимается. Если две или больше - дефектные, партия бракуется. А если только одно - дефектное? В реальной ситуации в таких случаях начинаются споры между представителями предприятия и экологического контроля, или поставщика и потребителя. Говорят, например, что дефектная единица

случайно попала в партию, что ее подсунули конкуренты или что при контроле случайно сделан неправильный вывод. Поэтому, чтобы споры пресечь, берут вторую выборку объема 40 (вдвое большего, чем в первый раз). Если все единицы во второй выборке - годные, то партию принимают, в противном случае - бракуют.

В реальной нормативно-технической документации - договорах на поставку, технических регламентах, стандартах, технических условиях, инструкциях по экологическому контролю и т.д. - не всегда четко сформулированы планы статистического контроля и правила принятия решений. Например, при описании двухступенчатого плана контроля вместо задания приемочного числа *c* может стоять загадочная фраза "результат контроля второй выборки считается окончательным". Остается гадать, как принимать решение по второй выборке. Менеджер, администратор (государственный служащий), инженер, эколог или экономист, занимающийся вопросами экологического контроля или контроля качества, должен первым делам добиваться кристальной ясности в формулировках правил принятия решений, иначе ошибочные и необоснованные решения, а потому и убытки неизбежны.

Оперативная характеристика плана статистического контроля. Каковы свойства плана статистического контроля? Они, как правило, определяются с помощью функции $f(p)$, связывающей вероятность p дефектности единицы контроля с вероятностью $f(p)$ приемки партии, положительной оценки экологической обстановки или правильности ведения бухгалтерской документации по результатам контроля. При этом вероятность p того, что конкретная единица дефектна, называется входным уровнем дефектности, а указанная функция называется оперативной характеристикой плана контроля. Если дефектные единицы отсутствуют, $p = 0$, то партия всегда принимается, т.е. $f(0) = 1$. Если все единицы дефектные, $p = 1$, то партия наверняка бракуется, $f(1) = 0$. Между этими крайними значениями p функция $f(p)$ монотонно убывает. При изучении свойств плана входной уровень

дефектности p - свободный параметр, он может принимать любые значения между 0 и 1.

Вычислим оперативную характеристику плана (n,0). Поскольку партия принимается тогда и только тогда, когда все единицы являются годными, а вероятность того, что конкретная единица - годная, равна (1-p), то оперативная характеристика имеет вид

$$f(p) = P(X=0) = (1—p)^n. \quad (5)$$

Для плана (n,1) оперативная характеристика, как легко видеть, такова:

$$f(p) = P(X=0)+P(X=1) = (1—p)^n + np\,(1—p)^{n-1}. \quad (6)$$

Оперативные характеристики для конкретных планов статистического контроля не всегда имеют такой простой вид, как в случае формул (5) и (6). Рассмотрим в качестве примера план (20, 0, 2) + (40, 0). Сначала найдем вероятность того, что партия будет принята по результатам контроля первой партии. Согласно формуле (5) имеем:

$$f_1(p) = P(X=0) = (1—p)^{20}.$$

Вероятность того, что понадобится контроль второй выборки, равна

$$P(X=1) = 20p(1—p)^{19}.$$

При этом вероятность того, что по результатам её контроля партия будет принята, равна

$$f_2(p) = P(X=0) = (1—p)^{40}.$$

Следовательно, вероятность того, что партия будет принята со второй попытки, т.е. что при контроле первой выборки обнаружится ровно одна дефектная единица, а затем при контроле второй — ни одной, равна

$$f_3(p) = P(X=1)\, f_2(p) = 20p(1—p)^{19}(1—p)^{40} = 20p(1—p)^{59}.$$

Следовательно, вероятность принятия партии с первой или со второй попытки равна

$$f(p) = f_1(p) + f_3(p) = (1—p)^{20} + 20p(1—p)^{59}.$$

При практическом применении методов статистического приемочного контроля для нахождения оперативных характеристик планов контроля вместо формул, имеющих обозримый вид лишь для отдельных видов планов,

применяют численные компьютерные алгоритмы или заранее составленные таблицы.

Риск поставщика и риск потребителя, приемочный и браковочный уровни дефектности. С оперативной характеристикой связаны важные понятия *приемочного и браковочного уровней дефектности*, а также понятия *«риск поставщика»* и «*риск потребителя»*. Чтобы ввести эти понятия, на оперативной характеристике выделяют две характерные точки, делящие входные уровни дефектности на три зоны (области) - *А*, *Б* и *В*. В зоне *А* почти всегда все хорошо, а именно - почти всегда экологическая обстановка признается благополучной, почти все партии принимаются. В зоне *В*, наоборот, почти всегда все плохо, а именно - почти всегда экологический контроль констатирует экологические нарушения, почти все партии бракуются. Зона. *Б* - буферная, переходная, промежуточная, в ней как вероятность приемки, так и вероятность браковки заметно отличаются от 0 и 1. Для задания границ между зонами выбирают два малых числа—риск поставщика (производителя, предприятия) α и риск потребителя (заказчика, системы экологического контроля) β, при этом границы между зонами задают два уровня дефектности - приемочный $p_{пр}$ и браковочный $p_{бр}$, определяемые из уравнений

$$f(p_{пр}) = 1—\alpha,\ f(p_{бр}) = \beta. \qquad (7)$$

Таким образом, если входной уровень дефектности не превосходит $p_{пр}$, то вероятность забракования партии мала, т.е. не превосходит α. Приемочный уровень дефектности выделяет зону *А* значений входного уровня дефектности, в которой нарушения экологической безопасности почти всегда не отмечаются, партии почти всегда принимаются, т.е. соблюдаются интересы проверяемого предприятия (в экологии), поставщика (при контроле качества). Это - зона комфортности для поставщика. Если он обеспечивает работу (входной уровень дефектности) в этой зоне, то его практически никогда никто не потревожит.

Если же входной уровень дефектности больше браковочного уровня дефектности $p_{бр}$, то нарушения почти наверняка фиксируются, партия почти всегда бракуется, т.е. экологи узнают о нарушениях, потребитель оказывается

защищен от попадания к нему партий со столь высоким уровнем брака. Поэтому можно сказать, что в зоне *B* соблюдаются интересы потребителей - брак к ним не попадает.

При выборе плана контроля часто начинают с выбора приемочного и браковочного уровней дефектности. При этом выбор конкретного значения приемочного уровня дефектности отражает интересы поставщика, а выбор конкретного значения браковочного уровня дефектности - интересы потребителя. Можно доказать (см. следующий раздел), что для любых положительных чисел α и β и любых входных уровней дефектности $p_{пр}$ и $p_{бр}$, причем $p_{пр}$ меньше $p_{бр}$, найдется план контроля (n,c) такой, что его оперативная характеристика $f(p)$ удовлетворяет неравенствам

$$f(p_{пр}) \geq 1 - \alpha, \; f(p_{бр}) \leq \beta.$$

При практических расчетах обычно принимают α = 0,05 (т.е. 5%) и β = 0,1 (т.е. 10%).

В качестве примера вычислим приемочный и браковочный уровни дефектности для плана (n,0). Из формул (5) и (7) вытекает, что

$$(1 - p_{пр})^n = 1 - \alpha, \; p_{пр} = 1 - (1 - \alpha)^{1/n}.$$

Поскольку риск поставщика α мал, то из известного соотношения математического анализа

$$\sqrt[n]{1 - \alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{\alpha^2}{n^2}\right)$$

вытекает приближенная формула

$$p_{пр} \approx \frac{\alpha}{n}.$$

Для браковочного уровня дефектности имеем

$$p_{бр} = 1 - \beta^{1/n}.$$

При практическом применении методов статистического приемочного контроля аналитическими формулами, имеющих обозримый вид лишь для отдельных видов планов, не пользуются. Для нахождения приемочных и браковочных уровней дефектности планов контроля вместо них применяют

численные компьютерные алгоритмы или заранее составленные таблицы. Такие таблицы имеются в нормативно-технической документации или научно-технических публикациях.

Предел среднего выходного уровня дефектности. Обсудим судьбу забракованной партии продукции. В зависимости от ситуации эта судьба может быть разной. Партия может быть утилизирована. Например, забракованная партия гвоздей может быть направлена на переплавку. У партии может быть понижена сортность, и она может быть продана по более низкой цене (при этом результаты выборочного контроля будут использованы не только для констатации того, что не выдержан заданный уровень качества, но и для оценки реального уровня качества). Наконец, партия продукции может быть подвергнута сплошному контролю (для этого обычно привлекают инженеров из всех заводских служб). При сплошном контроле все дефектные изделия обнаруживаются и либо исправляются на месте, либо извлекаются из партии. В результате в партии остаются только годные изделия. Такая процедура называется "контроль с разбраковкой".

При среднем входном уровне дефектности p и применении контроля с разбраковкой с вероятностью $f(p)$ партия принимается (и уровень дефектности в ней по-прежнему равен p) и с вероятностью $(1- f(p))$ бракуется и подвергается сплошному контролю, в результате чего к потребителю поступают только годные изделия. Следовательно, по формуле полной вероятности средний выходной уровень дефектности равен

$$f_1(p)= pf(p) +0(1 - f(p)) = pf(p).$$

Средний выходной уровень дефектности $f_1(p)$ равен 0 при $p=0$ и $p=1$, положителен на интервале (0;1), а потому достигает на нем максимума, который в теории статистического контроля называется пределом среднего выходного уровня дефектности (сокращенно ПСВУД):

$$\text{ПСВУД} = \max_{0 \le p \le 1} f_1(p).$$

Пример. Рассмотрим план (n,0). Для него $f(p) = (1 - p)^n$ и $f_1(p) = p(1-p)^n$. Чтобы найти ПСВУД, надо приравнять 0 производную среднего выходного уровня дефектности по среднему входному уровню дефектности:

$$\frac{df_1(p)}{dp} = \left(p(1-p)^n\right)' = (1-p)^n + pn(1-p)^{n-1} =$$

$$= (1-p)^{n-1}(1-p-pn) = (1-p)^{n-1}(1-(n+1)p) = 0.$$

В полученном уравнении корень $p = 1$ соответствует минимуму, а не максимуму. Поскольку непрерывная функция на замкнутом отрезке достигает максимума, то максимум достигается при

$$p_n = \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\text{ПСВУД} = p_n(1-p_n)^n = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n. \qquad (8)$$

По выражению (8) могут быть проведены конкретные расчеты. Однако оно довольно громоздко. Его можно упростить, используя один замечательный предел из курса математического анализа, а именно:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1} = \frac{1}{2{,}718281828...} \approx 0{,}368. \qquad (9)$$

Сравнивая соотношения (8) и (9), видим, что

$$\text{ПСВУД} = \left(\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Первая скобка равна $1/n$, а вторая согласно соотношению (9) приближается к 0,368 при росте объема выборки. Поэтому получаем простую асимптотическую формулу

$$\text{ПСВУД} \approx \frac{0{,}368}{n}.$$

Для более сложных планов ПСВУД рассчитывают с помощью более или менее сложных компьютерных программ.

При рассмотрении основ статистического контроля в настоящем пункте расчетные формулы удалось получить лишь для простейших планов, в основном для планов вида (n,0). Если ослабить требования и рассчитывать не на точные формулы, а на асимптотические, при $n \to \infty$, то можно справиться и с одноступенчатыми планами вида (n, c).

2.6. Практическое применение статистического контроля

Познакомившись с некоторыми основными понятиями, подходами и идеями теории статистического контроля качества, обсудим подробнее практические стороны этой технико-экономической области.

Анализ и синтез планов контроля

На основе теории статистического контроля можно проанализировать планы контроля качества, имеющиеся в нормативно-технической документации (стандартах, технических условиях) и в договорах на поставку продукции и оказание услуг. Достаточно часто оказывается, что формулировки соответствующих разделов (разделов "Правила приемки", "Методы контроля" и др.) имеют различные недостатки и неточности, что может послужить в дальнейшем причиной к возникновению арбитражных ситуаций (т.е. решаемых через арбитражные или иные суды).

Если обсуждаемая система контроля качества выдерживает чисто логическую проверку, то наступает вторая стадия - анализ с точки зрения теории статистического контроля. На этой стадии рассчитывают характеристики применяемых планов контроля. О некоторых из них уже шла речь - приемочный и браковочный уровни дефектности, предел среднего выходного уровня дефектности. Есть и иные показатели, например, средний используемый объем выборки, средняя стоимость контроля, и т.п. Особенно важна прогнозируемая доля арбитражных ситуаций (споров между предприятиями) при используемой системе контроля.

На стадии анализа возможны неожиданные "открытия". Например, может оказаться, что существующая система контроля качества, хотя и является формально безупречной, но защищает лишь от приемки столь плохих партий продукции, в которых более половины единиц продукции дефектно (т.е. для применяемых планов контроля браковочный уровень дефектности больше 0,5). Или что система контроля защищает интересы поставщиков, у которых каждое пятое изделие является бракованным (приемочный уровень дефектности равен 0,2).

Замечание. До сих пор постоянно говорилось о контроле единиц и партий продукции. Однако нет никакого принципиального отличия с контролем услуг (медицинских, туристических, транспортных, образовательных, банковских и иных) или документации. Поэтому теория и практика статистического контроля качества продукции дает полезные рекомендации для банковского дела и бухгалтерского аудита. Надо только аккуратно заменить слова, описывающие предметную область применения теории статистического контроля.

После анализа ситуации с системой контроля естественно перейти к улучшению этой системы, к обоснованному выбору планов, к этапу синтеза. В зависимости от конкретных условий используются разнообразные подходы к выбору планов. Например, задают приемочный и браковочный уровни дефектности. В случае контроля с разбраковкой естественно использовать ограничения на предел среднего выходного уровня дефектности.

Какая оптимизация планов статистического контроля возможна? Обсудим подробнее оптимизационные постановки в статистическом приемочном контроле. Очевидно, имеется три вида затрат и потерь:

- затраты непосредственно на проведение контроля единиц продукции, включенных в выборку,

- потери в случае неверного решения о забраковании партии продукции (в которой на самом деле доля дефектной продукции *соответствует* требованиям договора между поставщиком и потребителем или иной нормативно-технической документации);

- потери в случае неверного решения о принятии партии продукции (в которой на самом деле доля дефектной продукции *не соответствует* требованиям договора между поставщиком и потребителем или иной нормативно-технической документации).

При этом первые два вида затрат непосредственно связаны с деятельностью предприятия, на котором производится продукция, третий же вид затрат (потерь) формируется там, где она потребляется. С этим связана принципиальная сложность подсчета затрат третьего вида. Особенно эта сложность проявляется тогда, когда попадание к потребителю дефектных изделий может привести к авариям с человеческими жертвами. Тогда возникает вопрос: сколько стоит человеческая жизнь? Только оценив потери здоровья и жизни в денежных единицах, можно сформировать функционал качества плана статистического контроля и затем оптимизировать его. Поскольку невозможно (прежде всего, из этических и религиозных соображений) выразить стоимость человеческой жизни в денежных единицах, то невозможно сформировать функционал качества плана статистического контроля и тем более оптимизировать его.

К счастью, для большинства видов продукции вопрос о денежной оценке человеческой жизни не возникает. Проблема обычно "всего лишь" в том, что выпущенная продукция используется разнообразными конечными потребителями, а потому оценить отрицательный эффект повышения доли ее дефектности затруднительно.

Поэтому наряду с функционалом качества, включающим все три вида затрат, рассматривают "условный" функционал на основе затрат первых двух типов, а на вероятность принятия партии продукции, в которой доля дефектной продукции не соответствует требованиям нормативно-технической документации, накладывают ограничение, т.е., грубо говоря, третий вид затрат учитывают в качестве ограничения.

Должны ли совпадать планы контроля у поставщика и потребителя? Естественно также по-разному проводить контроль у поставщика

(производителя) и потребителя (заказчика). Пусть для определенности поставщик используют план $(n_1,0),$ а потребитель - $(n_2,0).$ Тогда естественно зафиксировать в договоре о поставке, что $n_1 >> n_2.$ Такая договоренность обеспечит тщательный контроль со стороны изготовителя и почти автоматическое подтверждение приемки со стороны потребителя (т.е. отсутствие спора).

Одна из распространенных догм состоит в том, что изготовитель и потребитель должны проводить контроль по одним и тем же планам контроля. Если план контроля и входной уровень контроля таков, что ситуация контроля относится к буферной зоне *Б*, т.е. вероятность приемки партии заметно отличается от 0 и 1, то указанная догма приводит к высокой вероятности спорных ситуаций. Пусть, например, оперативная характеристика равна 0,5. Пусть изготовитель принял партию (с вероятностью 0,5). После этого при независимом контроле у потребителя с той же вероятностью 0,5 она может быть отклонена и с вероятностью 0,5 принята. Значит, общий итог таков: 50% за то, что партия будет забракована у поставщика, 25% - за спорную ситуацию (поставщик принял, потребитель забраковал), 25% - за принятие и поставщиком и потребителем. Конечно, рассмотрен крайний случай - наиболее частое появление спорных ситуаций. Но реальное появление 10-15% арбитражных споров - это типовая ситуация в 80-е годы.

Один из вариантов выбора планов контроля поставщиком и потребителем выглядит так. Стороны договариваются о некотором "приемлемом" входном уровне дефектности p^*. Затем поставщик выбирает план контроля, используя p^* как браковочный уровень дефектности, а потребитель - рассматривая p^* как приемочный уровень дефектности.

Усеченные планы

Пусть единицы продукции контролируются одна за другой (т.е. последовательно). Рассмотрим план статистического контроля (60, 3). Пусть при проверке единицы продукции появляются в таком порядке: дефектная, дефектная, дефектная, дефектная,… Четыре дефектные единицы подряд! Надо

ли дальше проверять выборку? Исходя из здравого смысла - нет. Ведь совершенно неважно, каковы будут результаты по остальным 59-и единицам продукции, окажутся они годными или дефектными - 4 дефектные единицы уже есть, и партию следует забраковать. Контроль мог бы быть прекращен и тогда, когда при проверке 57 единиц все 57 окажутся годными - независимо от качества остальных 3 партию надо принимать.

Усеченные планы - это планы статистического контроля, в которых контроль разрешается прекращать, если итог (принятие или забракование партии) становится ясен ранее, чем проведен контроль всех включенных в выборку единиц продукции. Усеченные планы применяются, когда единицы продукции поступают на контроль последовательно, одна за другой (или группа за группой). Это не всегда так. Если, например, план (60, 3) применяется для контроля качества электролампочек, и все 60 лампочек ввернуты в гнезда на испытательном стенде и одновременно включены, то подход на основе усеченных планов применить нельзя.

Возможность применения усеченных планов должна быть явным образом указана в нормативно-технической документации и в договорах на поставку. Опишем юридический казус, связанный с усеченными планами. В ГОСТе на штангенциркули был предусмотрен план контроля (20, 0). Органы Госстандарта проверяли завод "Точнометр" (название изменено). Проверили первый штангенциркуль - дефектен, второй - дефектен,…, десятый - дефектен. На этом комиссия остановилась, вполне резонно (с точки зрения здравого смысла) решив, что партия штангенциркулей должна быть забракована. Органы Госстандарта наложили на завод "Точнометр" штраф за выпуск некачественной продукции (в соответствии с действующим в то время правопорядком). Однако завод опротестовал это решение в суде. И суд удовлетворил протест, ссылаясь на то, что порядок проведения контроля качества штангенциркулей был нарушен! Бракоделы не смогли бы уйти от наказания, если бы в соответствующих документах была бы прописана возможность использования усеченных планов.

Выделение единиц бесформенной (жидкой, газообразной) продукции. Во всем предыдущем изложении постоянно встречается термин "единица продукции". Он вполне ясен, если речь идет об отдельных изделиях - дискетах, коробках спичек, патронах, бутылках минеральной воды, электробритвах, или отдельных деталях - болтах, гвоздях, пластмассовых дисках… Однако многие виды продукции имеют иной вид - газообразный, жидкий или, как говорят, бесформенный (порошкообразный, желеобразный,…). Как быть с ними?

Основное - это выделить единицу продукции. Она не должна быть очень малой, поскольку ясно, что в бесформенной продукции свойства вещества в близких точках близки. Основная идея состоит в том, чтобы взять некоторое количество пар точек, отстоящих друг от друга на определенное расстояние, и выяснить, есть связь (т.е. значим ли ранговый коэффициент корреляции Спирмена) между значениями изучаемого свойства в этих парах точек или нет. Если связь есть, значит, точки разнесены на недостаточное расстояние, другими словами, точки относятся к одной и той же единице продукции. Поэтому расстояние между точками надо увеличить. Если связь уже не обнаруживается, то это значит, что они относятся к разным единицам продукции. В процессе увеличения расстояния тем самым была оценена величина ребра куба, в виде которого условно представляем себе единицу бесформенной продукции. Разбив бесформенную продукцию на единицы, можно применять описанные выше подходы для контроля ее качества.

Отбор случайной выборки при статистическом контроле качества продукции. Как и при любом выборочном обследовании, при статистическом контроле качества продукции остро строит проблема отбора репрезентативной (представительной) выборки (см. главу 1 выше). Эта проблема усугубляется экономической заинтересованностью участников процесса. Наиболее научно-обоснованным является использование датчиков псевдослучайных чисел (а не таблиц или физических датчиков случайных чисел).

Исходя из экономической и технической целесообразности, популярна схема многоступенчатой выборки. Например, из 15 вагонов отобрать вагон №

5, из него - контейнер №3 около двери (из 12 контейнеров), из контейнера №3 - ящики №№ 7, 15 и 23, а из этих ящиков - каждое пятое изделие. При этом описании составления выборки совершенно ясно, что реально классическая случайная выборка может быть организована лишь при контроле контейнера №3, и остается только надеяться, что он является типичным для всей партии.

Всегда ли нужен контроль качества продукции? Чем выше достигнутый уровень качества, тем больше необходимый объем контроля - таков парадокс классической теории статистического контроля. Возможный выход состоит в переходе к принципиально новому подходу, обеспечивающему существенное расширение возможностей менеджера при выборе технической политики на основе учета экономических рисков. При этом оказывается, что даже «перекладывание» контроля на потребителя может быть экономически выгодно, если производитель организовал защиту от риска методом пополнения партий или путем развития технического обслуживания.

В государственных стандартах, технических условиях, другой нормативно-технической документации, относящейся к потребительским товарам и услугам, различным изделиям, веществам, материалам, иным видам продукции, а также в договорах между поставщиками и потребителями обычно присутствуют разделы «Правила приемки и методы контроля». Поэтому, в частности, методы статистического контроля качества продукции являются важной составной частью статистических методов сертификации. Как уже говорилось, имеется соответствующая вероятностно-статистическая теория, посвященная анализу и синтезу (выбору) планов контроля. Однако эта теория вообще не предусматривает отказа от контроля, поскольку игнорирует возможность перехода на иную стратегию организации взаимоотношений поставщика и потребителя, например, на стратегию технического обслуживания, при которой выходной контроль не проводится, а обнаруженные потребителями дефектные изделия заменяются годными или ремонтируются. Основная обсуждаемая в настоящем пункте идея - обоснование необходимости включения теории статистического приемочного контроля в более широкую

технико-экономическую теорию взаимоотношений поставщиков и потребителей и целесообразности перехода при повышении качества продукции от контроля качества к иным способам защиты потребителя, например, к развитому техническому обслуживанию или к поставке запасных единиц продукции.

Использование экономических показателей при выборе планов статистического (выборочного) контроля пропагандировалось давно, но делалось это в рамках парадигмы обязательности контроля. Здесь рассматривается более широкая система взглядов, согласно которой контроль качества продукции - лишь один из способов урегулирования взаимоотношений между поставщиками и потребителями.

В более широком плане речь идет об отказе от получения детальной информации, если она стоит слишком дорого, и переходе к использованию иных механизмов управления. Так, качественные методы химического анализа часто используют именно потому, что соответствующие количественные методы более трудоемки и дороги, но не намного полезнее с практической точки зрения. Пример из всем знакомой области: в средней школе знания учащихся контролируются еженедельно, в высшей же - один или несколько раз в семестр. Однако разница с точки зрения эффективности управления процессом обучения невелика. Другой пример: как показано в статистике интервальных данных, из-за погрешностей измерений нецелесообразно увеличивать их число сверх некоторого "рационального объема выборки", а для увеличения точности оценивания характеристик вероятностных распределений необходимо использовать более точные средства измерения. С учетом сказанного описываемый здесь подход представляется не столь необычным.

Оценка снизу необходимого объема выборки. Как известно, в теории статистического приемочного контроля качества продукции разработано много подходов к выбору планов контроля:

- на основе приемочного и браковочного уровней дефектности;

- исходя из предела среднего выходного уровня дефектности (при контроле с разбраковкой);

- с использованием экономических показателей, относящихся к предприятию (см., например, ГОСТ 24660-81);

- с использованием экономических показателей, относящихся к народному хозяйству в целом; и т.д..

Имеется обширная литература, посвященная обоснованию и сравнению этих подходов, разработке соответствующей математической теории и программного обеспечения. Не углубляясь в эти проблемы, сосредоточим внимание на одном парадоксальном явлении: при повышении качества выпускаемой продукции теория рекомендует увеличивать объем контроля!

Действительно, при повышении качества выпускаемой продукции требования потребителя, очевидно, обеспечиваются все лучше. Следовательно, должен уменьшаться браковочный уровень дефектности, т.е. то значение входного уровня дефектности, при котором вероятность приемки партии равна риску потребителя. Из всех планов с общим объемом контроля n минимум вероятности приемки партии (т.е. оперативной характеристики) достигается на одноступенчатом плане (n,0). (Напомним, что согласно этому плану партия принимается тогда и только тогда, когда из n проверенных единиц продукции все оказываются годными.) Другими словами, оперативная характеристика для плана (n,0) является огибающей (снизу) множества всех оперативных характеристик. Следовательно, из всех планов с общим объемом контроля n минимум браковочного уровня дефектности достигается также на плане (n,0).

В дальнейшем будем исходить из биномиальной модели выборки, согласно которой число дефектных единиц продукции в выборке объема n имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, где p - входной уровень дефектности. Как хорошо известно, эта модель является приближением для модели простой случайной выборки из партии, согласно которой указанное число имеет гипергеометрическое распределение. Напомним, что по чисто математическим причинам гипергеометрическая модель переходит в

биномиальную, если объем партии безгранично возрастает, а доля дефектных единиц продукции в партии приближается к p. Если объем выборки составляет не более 10% объема партии, то с достаточной для практики точностью принимают, что соответствующее биномиальное распределение хорошо приближает гипергеометрическое.

Примем обычное предположение о том, что риск потребителя равен 0,10. Как известно, браковочный уровень дефектности $p_{бр}$ для плана (n,0) определяется из условия

$$(1 - p_{бр})^n = 0{,}10.$$

Это соотношение дает возможность по заданному браковочному уровню дефектности $p_{бр}$ найти необходимый объем выборки:

$$n = \ln 0{,}10 / \ln (1 - p_{бр}) = - 2{,}30/\ln (1 - p_{бр}).$$

Поскольку в силу сказанного ранее представляют интерес малые значения браковочного уровня дефектности, воспользуемся тем, что при малых x согласно правилам математического анализа

$$\ln (1 + x) = x + O (x^2) .$$

Вторым слагаемым в правой части последней формулы, как обычно в асимптотических рассуждениях, можно пренебречь. Следовательно, необходимый объем выборки с достаточной точностью может быть найден по формуле

$$n = 2{,}30/p_{бр} . \qquad (15)$$

(При конкретных расчетах надо, очевидно, правую часть округлить до ближайшего целого числа.) Например, при довольно низком (с точки зрения мирового рынка) качестве выпускаемой продукции можно задать $p_{бр} = 0{,}01$, т.е. потребовать, чтобы почти все (точнее, не менее 90%) партии, в которых дефектных единиц больше, чем 1 из 100, были забракованы и не достигли потребителя. Тогда объем контроля должен составлять не менее $n = 230$.

Основной парадокс теории статистического приемочного контроля

Как следует из сказанного выше, необходимый объем выборки, определяемый для какого-либо плана контроля по заданному браковочному уровню дефектности $p_{бр}$, будет не меньше, чем для плана (n,0), т.е. не меньше, чем 2,30/$p_{бр}$.Таким образом, если достигнут достаточно высокий уровень качества, такой, что потребителю может попасть не более 1 дефектной единицы продукции из 10000, т.е. $p_{бр}$ = 0,0001, то объем контроля должен быть не меньше n = 23000. Если же качество повысится в 100 раз, т.е. потребителю сможет попасть не более 1 дефектной единицы продукции из 1000000, то объем контроля и затраты на него возрастут также в 100 раз, и минимально необходимый объем контроля составит 2,3 миллиона единиц продукции. Поскольку объем партий большинства (практически всех!) видов продукции существенно меньше этого числа, то проведенные выше расчеты говорят о необходимости перехода на сплошной контроль.

Итак, выводы парадоксальны: если качество выпускаемой продукции не очень хорошее, то целесообразно проводить статистический (выборочный) контроль, если же качество возрастает, то объем контроля и затраты на него увеличиваются, вплоть до перехода на сплошной контроль. Если это возможно, т.е. контроль не является разрушающим. А если невозможно, то попадаем в тупиковую ситуацию - высокое качество не может быть подтверждено.

В реальных ситуациях объемы контролируемых выборок - единицы или десятки, но обычно отнюдь не сотни и тысячи. Если контролируются 100 изделий, то согласно формуле (15) браковочный уровень дефектности равен 2,3%. И это - предел для реально используемых объемов контроля. Следовательно, статистический приемочный контроль (в том числе выходной или входной) может быть применен для контроля лишь такой продукции, в которой из 50 изделий хотя бы одно дефектно. Другими словами, этот метод управления качеством предназначен лишь для продукции сравнительно низкого качества (входной уровень дефектности не менее 1-2%) или при обслуживании

потребителя, согласного на довольно высокий браковочный уровень дефектности (не менее 2,3%).

Следовательно, для повышения качества необходимо использовать контрольные карты и другие методы статистического регулирования технологических процессов на предприятии. О них подробно рассказано в следующем разделе, а также, например, в монографиях [1],[7]. В частности, упомянем методы «всеобщего» (в другом переводе - тотального) контроля качества и др. Недаром этим методам уделяется больше внимания в зарубежных методических изданиях, чем собственно статистическому приемочному контролю.

От контроля к пополнению партии. Рассмотрим простую идею: отказываемся от контроля качества вообще, но зато по первому требованию потребителя заменяем дефектную единицу продукции на новую. При этом экономим на контроле, но вместо этого тратим средства на замену продукции. Выгодно это или не выгодно?

Замена продукции может проводиться различными способами. Для многих видов товаров народного потребления это делается с помощью системы гарантийного обслуживания, гарантийных сроков и мастерских, через сеть розничной торговли и т.д.

Другой вариант - к партии поставляемой продукции добавляется некоторое количество единиц продукции для замены имеющихся, возможно, в ней дефектных единиц. Сначала обсудим подробнее именно этот вариант идеи замены продукции.

Пусть поставщик выпускает продукцию с известным ему уровнем дефектности p. Тогда число X дефектных единиц в партии объема N имеет биномиальное распределение с параметрами N и p. По теореме Муавра-Лапласа X не превосходит (при достаточно большом N) величины

$$D_0(t) = Np + t(Np(1-p))^{1/2}$$

с вероятностью Ф(*t*). где Ф(.) - функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Поскольку Ф(4) = 0,999968329, то для практических целей достаточно положить *t* = 4, при этом более чем $D_0(4)$ дефектных единиц продукции попадет в партию лишь в 3 случаях из 100000.

Пусть C_0 - цена одной единицы продукции, C_1 - стоимость неразрушающего контроля одной единицы продукции (с исправлением дефектов при их обнаружении). Сравним сначала две стратегии технико-экономических отношений поставщика с потребителями:

сплошной контроль (затраты C_1N)

и пополнение партии дополнительными изделиями в числе $D_0(4)$ (затраты $C_0D_0(4)$). Вторая стратегия лучше (экономически выгоднее), если

$$C_1N > C_0D_0(4) = C_0(Np + 4\sqrt{Np(1-p)}). \qquad (16)$$

Поделим на C_0N, получим равносильное неравенство

$$\frac{C_1}{C_0} > p + 4\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}.$$

Поскольку *p(1-p)* не превосходит 1/4 при всех *p*, то из неравенства

$$C_1/C_0 > p + 2/N^{1/2} \qquad (17)$$

вытекает неравенство (16). Ясно, что в случае, если

$$C_1/C_0 > p,$$

неравенство (17) (а потому и неравенство (16)) выполняется при достаточно больших объемах партии, а именно, при

$$N > \{2\,C_0/(C_1 - C_0\,p)\}^2.$$

Например, если стоимость контроля составляет 10% от стоимости продукции (типовая ситуация в машиностроении), т.е. $C_1/C_0 = 0{,}1$, а уровень дефектности $p = 0{,}01$, то последнее неравенство дает $N>493$. В то же время нетрудно проверить, что неравенство (16) выполняется при

$$0{,}1 > 0{,}01 + 4\,(0{,}01\times0{,}99)^{1/2}/N^{1/2},$$

т.е. при $N > 19$. Расхождение более чем на порядок (в 26 раз) объясняется заменой при переходе от формулы (16) к формуле (17) величины $p(1-p)$ на 1/4, т.е. на гораздо большую величину - при малом входном уровне дефектности p.

Выгодно ли введение статистического контроля? Пусть рассматривается описанная выше стратегия пополнения партий. Мы сравнивали ее со стратегией сплошного контроля, которая во многих случаях оказалась хуже. Может быть, поставщику имеет смысл использовать статистический контроль? Понятно, что речь может идти лишь о (неразрушающем) контроле с разбраковкой, поскольку только в этом случае меняется доля дефектности в потоке партий, направляемых потребителям.

Пусть используется план $(n,0)$ с приемочным уровнем дефектности, равным реально достигнутому предприятием уровню дефектности p. Как известно, тогда объем выборки определяется из условия

$$(1-p)^n = 0{,}95,$$

т.е.

$$n = \ln 0{,}95 / \ln (1 - p) = - 0{,}0513 / \ln (1 - p) .$$

При малом p уже не раз применявшееся соотношение из математического анализа дает с достаточной для практики точностью

$$n = 0{,}05 / p .$$

С вероятностью $(1-p)^n = 0{,}95$ партия принимается, с вероятностью 0,05 подвергается разбраковке. В первом случае партия поступает к потребителю с тем же уровнем дефектности, что и до контроля, но при этом добавляются затраты на контроль, равные $C_1 n$. Партию необходимо пополнить $D_0(4)$ изделиями (затраты $C_0 D_0(4)$), общие затраты (в среднем на одну выпущенную партию) равны

$$0{,}95 (C_1 n + C_0 D_0 (4)) .$$

Во втором случае фактически проводится сплошной контроль с исправлением дефектов и затратами $C_1 N$. Суммарные затраты при использовании выборочного контроля равны

$$0{,}95\ (C_1 n + C_0\ D_0\ (4))\ + 0{,}05\ C_1 N\ .$$

Он более выгоден, чем отсутствие контроля (с добавлением "запасных" изделий), в случае справедливости неравенства

$$0{,}95\ (C_1 n + C_0\ D_0\ (4))\ + 0{,}05\ C_1 N\ < C_0\ D_0(4),$$

что эквивалентно неравенству

$$19\ C_1 n\ + C_1 N < C_0\ D_0(4).$$

Сравнение с формулой (16) показывает, что если контроль не является разрушающим, то выборочный контроль менее выгоден, чем сплошной. По сравнению с формулой (16) добавляется первое слагаемое в левой части последней формулы. И тем более выборочный контроль в экономической эффективности весьма проигрывает по сравнению с отсутствием контроля в сочетании с пополнением партии.

Итак, введение статистического контроля в схеме пополнения партии не выгодно.

От системы контроля к системе технического обслуживания. Вернемся к первому из указанных ранее вариантов замены продукции. Что выгоднее - сплошной контроль на предприятии или замена дефектных изделий, обнаруженных потребителями? Реальное перекладывание контроля на потребителей влечет потери, связанные с удовлетворением их претензий, но при малой доле дефектных изделий эти потери малы по сравнению с затратами на контроль.

Действительно, пусть W - средние потери поставщика, связанные с пропуском потребителю дефектной единицы продукции. Сюда входят, в частности, такие виды потерь:

- стоимость новой единицы продукции (при замене изделия или возврате его стоимости);

- расходы системы распределения продукции и гарантийного ремонта, включая издержки на устранение дефектов;

- потери из-за нежелательного изменения предпочтений потребителя, из-за снижения имиджа фирмы;

- затраты на возмещение ущерба, понесенного потребителем, страховые сборы, судебные издержки, и т.д.

Потери W в несколько раз (по экспертной оценке - обычно в 5-10 раз) превышают расходы C_0 на изготовление единицы продукции. Кроме того, для быстрого решения проблем потребителей, связанных с обнаружением дефектов, необходима развитая система технического обслуживания.

Пусть изготовлена партия продукции объема N. Тогда расходы на сплошной (неразрушающий) контроль составляют C_1N (при этом дефектные единицы продукции извлекаются и утилизируются, расходами на утилизацию или доходами от нее в настоящем изложении пренебрегаем). Пусть p - доля дефектных единиц продукции в партии. Тогда Np - математическое ожидание числа дефектных единиц продукции в партии, а WNp - математическое ожидание потерь. Если

$$WNp < C_1 N, \quad p < C_1 / W, \quad (18)$$

то выгоднее отказаться от сплошного контроля. При повышении качества, т.е. снижении доли дефектности, целесообразно переходить к поиску и устранению дефектов не непосредственно на предприятии, а в пунктах системы технического обслуживания.

В формуле (18) участвует математическое ожидание WNp. Реальные потери могут быть больше, но не намного. Как и выше, с помощью теоремы Муавра-Лапласа можно утверждать, что практически наверняка они не превышают $WD_0(4)$, а потому преимущество решения об отказе от контроля неоспоримо при

$$WD_0(4) < C_1N, \quad p + 4(p(1-p))^{1/2}/N^{1/2} < C_1/W. \quad (19)$$

Аналогично выводу неравенства (17) заключаем, что неравенство (19) наверняка будет выполнено, если

$$p + 2/N^{1/2} < C_1/W. \quad (20)$$

Пусть $C_1/W = 0{,}1$, выпускается партия объема $N = 1600$. Тогда согласно неравенству (20) отказ от контроля выгоден уже при $p < 0{,}05$, т.е. граничное

значение соответствует довольно низкому уровню качества - 1 единица продукции из 20.

Выгодно ли в рассматриваемой ситуации вводить выборочный контроль? Пусть объем контроля равен n, приемочное число $c = 0$, с вероятностью y партия принимается, а с вероятностью $1 - y$ бракуется (и затем подвергается разбраковке). В первом случае расходы на контроль равны $C_1 n$, а остальная часть партии содержит в среднем $(N-n)p$ дефектных единиц продукции, и средние издержки равны $y\{C_1 n + W(N - n)p\}$. Во втором случае суммарные затраты равны $(1 - y)C_1 N$. Следовательно, введение контроля выгодно, если

$$y\{C_1 n + W(N - n)p\} + (1 - y)C_1 N < WNp .$$

Преобразуем это неравенство к виду

$$yn\{C_1 - Wp\}(1 - y)^{-1} + C_1 N < WNp. \quad (21)$$

Если выполнено неравенство $p<C_1/W$, то второе слагаемое в левой части неравенства (21) больше правой части этого неравенства, в то время как первое слагаемое в левой части (21) положительно. Следовательно, неравенство (21) неверно, и введение выборочного контроля нецелесообразно - как и в разобранном ранее случае метода пополнения партий[11],[12],[13].

Выше приведен базовый (простейший, исходный) метод сравнения различных систем взаимоотношений поставщиков и потребителей. При разработке практически пригодных систем принятия решений целесообразно дальнейшее его развитие.

Отметим в заключение, что реально статистический контроль качества продукции, осуществляемый поставщиком (выходной контроль), решает две основные задачи: обеспечение интересов потребителя и обнаружение разладок собственных технологических процессов (по результатам контроля последовательности партий). Как показано выше, для решения первой из этих задач он не всегда оптимален. Вторую из названных задач также часто эффективнее решать с помощью иных методов, например, обнаруживать разладку технологических процессов с помощью тех или иных контрольных

карт. Таким образом, область применения методов статистического приемочного контроля является довольно ограниченной. Очевидно, однако, что нельзя исключать эти методы из арсенала менеджеров по качеству, в частности, при использовании концепции «всеобщего управления качеством (*TQM - Total Quality Management*)». Хотя бы потому, что они незаменимы при использовании разрушающих методов контроля.

Наиболее перспективным представляется использование полученных результатов в рамках концепции контроллинга (см., например, [8],[9],[10]). Итак, выше сформулирован основной парадокс теории статистического приемочного контроля - повышение качества выпускаемой продукции приводит к увеличению объема контроля. Описан способ разрешения этого парадокса - на основе перехода от чисто технической политики выбора плана контроля к технико-экономической. Она исходит из сравнения по экономическим показателям схем контроля и схем технического обслуживания и пополнения партий. Проанализирован базовый метод такого сравнения, позволяющий выделить область экономического преимущества схемы пополнения партий и схемы технического обслуживания по сравнению со схемой контроля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М., Наука, 1979. – 296 с.
2. Статистические методы повышения качества. Перевод с японского Под ред. Х. Кумэ. - М.: Финансы и статистика, 1990.- 301 с.
3. Организационно-методические материалы по маркетингу на предприятии. - М.: Всесоюзный центр статистических методов и информатики, 1991. - 91 с.
4. Цели и принципы стандартизации. / Под ред. Т. Сандерса. - М.: Изд-во стандартов, 1974. - 132 с.
5. Broody M. Helping Workers Work Smarter / Fortune. June 8. 1987. Pp.86-88.
6. Гнеденко Б.В. Математика и контроль качества продукции. - М.: Знание, 1978. - 64 с.
7. Мердок Дж. Контрольные карты. / Пер. с англ. - М.: Финансы и статистика, 1986. - 132 с.

8. Фалько С.Г., Носов В.М. Контроллинг на предприятии. - М.: Об-во "Знание" России, 1995. - 80 с.

9. Хан Д. Планирование и контроль: концепция контроллинга. / Пер. с нем. - М.: Финансы и статистика, 1997. - 800 с.

10. Карминский А.М., Оленев Н.И., Примак А.Г., Фалько С.Г. Контроллинг в бизнесе. Методологические и практические основы.

11. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. - М., Наука, 1979. – 296 с.

12. Статистические методы повышения качества. Перевод с японского Под ред. Х. Кумэ. - М.: Финансы и статистика, 1990.- 301 с.

13. Организационно-методические материалы по маркетингу на предприятии. - М.: Всесоюзный центр статистических методов и информатики, 1991. - 91 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Ведущим методом исследования, в сегодняшней микроэкономике, является моделирование экономических явлений и процессов.

Модель помогает проанализировать основные взаимные связи и выводит основные законы взаимосвязи между основными действующими объектами и субъектами в определенных условиях. Дадим полное определение:

Экономическая модель — это упрощенное представление об экономической действительности.