Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова»
Институт математики и информатики
Кафедра геометрии и методики преподавания математики

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Тема:

«Методы решения планиметрических и основы решения стереометрических задач в школьном курсе геометрии»

Выполнила: студент гр. 05950з
Осокина Т.А.
Научный руководитель: к.т.н., доцент
Дубанов А.А.

Улан-Удэ
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……2

ГЛАВА 1. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ РЕШЕНИЮ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ И СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ……5

1.1 Психолого-педагогическая характеристика учащихся подросткового возраста…….5

1.2 Значение задач в школьном курсе планиметрии……..20

1.3 Психологические особенности изучения стереометрии в школе……...40

1.4 Подходы к методологии решения стереометрических задач……..45

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ И ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

2.1 Задача: понятие, структура, решение……...25

2.2 Роль и функции геометрических задач……26

2.3 Классификации геометрических задач……....28

2.4 Методика обучения решению стандартных геометрических задач…..33

2.5 Метод дополнительных построений (конструктивный)…….....34

2.6 Аналитические методы…….…..41

2.7 Вспомогательные задачи……....44

2.8 Проблемные методы решения стереометрических задач……66

2.9 Разработка урока по решению стереометрических задач……...…67

ЗАКЛЮЧЕНИЕ…….68

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ……..…69

ВВЕДЕНИЕ

В разное время высказывались различные мнения о преподавании геометрии в школе и ее месте в системе образования. Недостатки в освоении геометрии ведут к серьезному ущербу всего миропонимания.

Многие современные школьники не умеют решать задачи геометрии, а особенно — планиметрические задачи.

Планиметрия представляет собой замкнутую модель науки, внутри которой можно бесконечно совершенствоваться, дает большие возможности для развития творческого, интеллектуального, создает тот самый развивающий дискомфорт, преодолевая который, ребенок только и может двигаться вперед в своем развитии. Успешность во многом зависит от самих школьников, от их инициативы и творчества.

Геометрические образы сопровождают человека в течение всей его жизни, начиная с первых лет. Первичные геометрические сведения у человека появляются до того, как он способен их формально - логически осмыслить.

В современной школе начальная часть геометрического образования развита недостаточно.

Вследствии этого при переходе в 7 класс школьники встречаются с трудностями, возникающими при изучении систематического курса геометрии:

- ✓ во-первых, происходит знакомство с новой терминологией,
- ✓ во-вторых, учащимся приходится работать с совершенно новыми объектами, восприятие которых требует развитого абстрактного мышления,
- ✓ в-третьих, от учащихся требуется не только свободное владение математическим языком, но и умение самостоятельно доказывать какие-либо утверждения.

В геометрии известно много методов решения разных задач, которые актуальны и по сей день. К ним относятся:

- методы с использованием дополнительных построений;
- методы, основанные на подобии треугольников;

- методы тригонометрической замены;
- методы, использующие соотношение между углами и сторонами прямоугольного треугольника;
- методы, использующие векторный аппарат.

Актуальность. В заданиях группы В (планиметрия) единого государственного экзамена по математике содержатся такие задачи, при решении которых учащиеся испытывают определенные затруднения, что ведет к потере времени на экзамене.

Умение решать планиметрическую задачу несколькими способами - один из залогов успешного решения стереометрических задач.

Стереометрия как раздел геометрии изучается в старших классах общеобразовательной школы. Раздел считается достаточно сложным в дидактическом плане. Даже старшеклассники, как показывают результаты ЕГЭ последних лет, не вполне усваивают знания стереометрии и не умеют решать стереометрические задачи. Для сравнения: задачи по планиметрии старшеклассники решают с меньшим трудом. Данная проблема лежит в плоскости педагогической психологии. Для усвоения стереометрии и решения стереометрических задач требуется высокое развитие пространственного мышления. Однако не только пространственное мышление отвечает за успешность овладения обучающимися методикой решения стереометрических задач: актуальность приобретает также математическое мышление. Там, где пространственное и математическое мышление соприкасаются возникают значительные методические трудности в формировании умений и навыков, связанных с решением стереометрических задач.

Большой вклад в поиск эффективных методов решения стереометрических задач на уроках геометрии внесли Г.Д. Глейзер, В.А. Гусев, А.В. Истратий, Г.Л. Луканкин, В.А. Оганесян, В.В. Орлов, В.А. Панчищина, Н.С. Подходова, И.В. Прояева, Е.И. Санина, В.Я. Саннинский, А.Д. Сафарова, И.М. Смирнова, А.В. Старшинова, О.В. Холодная, А.И. Фетисов, И.С. Якиманская. Однако на

методологическом уровне проблема решения стереометрических задач на уроках геометрии в школе недостаточно проработана.

Исходя из выше сказанного:

Объект исследования: Планиметрические задачи и процесс обучения стереометрии в школе.

Предмет исследования: Методы решения планиметрических и стереометрических задач.

Гипотеза:

Владение различными методами решения задач позволит выпускнику выбирать наиболее рациональный метод.

Изучая в школе предмет «Геометрия», учащиеся приобретают набор методов решения планиметрических, стереометрических задач. Была выбрана планиметрическая задача, которую можно было решать различными методами. Прорешав ее известными нам методами, я обратились к литературе за дополнительными методами решения. Провела классификацию этих методов. Выбрала более оптимальные. Предложила учащимся 8-11 классов решить данную задачу и выявила наиболее «популярные» методы решения.

Цель работы: Изучить и систематизировать различные методы решения планиметрических задач; на примере задач из учебников Атанасяна Л.С., Погорелова А.В. и Александрова А.Д. продемонстрировать преимущества решения задач различными методами; проанализировать наиболее эффективные методы решения стереометрических задач в школьном курсе геометрии.

Для достижения поставленной цели были определены следующие **задачи:**

- проанализировать действующие учебники 7-10 классов, методическую, педагогическую и психологическую литературу по теме выпускной квалификационной работы;

- познакомиться с многообразием решений планиметрических задач. Узнать какой из методов чаще всего используют ученики 8 - 10 классов.

- выявить и проанализировать психологические особенности изучения стереометрии в школе;

- проанализировать различные подходы к методологии решения стереометрических задач;

- проанализировать проблемные методы решения стереометрических задач;

- разработать урок по решению стереометрических задач.

Методы исследования:

1) анализ научной и методической литературы;

2) методическая разработка.

Структура исследования:

1) введение;

2) основная часть (две главы);

3) заключение;

4) список использованной литературы (25 наименований).

ГЛАВА 1 НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1.1 Психолого-педагогическая характеристика подросткового возраста

Общая характеристика возраста. Подростковый возраста охватывает период развития детей от 13 до 15 лет, что соответствует возрасту учеников VII-VIII классов средней школы.

Подростковый возраст - период гражданского становления человека, его социального самоопределения, активного включения в общественную жизнь, формирования духовных качеств гражданина.

Личность юноши и девушки складывается под влиянием совершенно нового положения, которое они начинают занимать по сравнению с подростком, в обществе, коллективе. Положение старших в школе, приобретение опыта серьезной общественной деятельности решающим образом сказываются на развитии личности учащихся X-XI классов.

Л.С. Выготский особое внимание обращал на развитие мышления в подростковом возрасте.

Главное в развитии мышления - овладение процессом образования понятий, что ведёт к высшей форме интеллектуальной деятельности, новым способам поведения.

По словам Л.С. Выготского, функция образования понятий лежит в основе всех интеллектуальных изменений в этом возрасте.

Организация учебной деятельности должна обеспечить ее направленность на формирование теоретического дискурсивного (рассуждающего) мышления, мышления, основанного на оперировании не конкретными образами и представлениями, а понятиями, на умении сопоставлять эти понятия, переходить в ходе рассуждения от одного суждения к другому.

В интеллектуальной деятельности учащихся в период отрочества усиливаются индивидуальные различия, связанные с развитием самостоятельного мышления, интеллектуальной активности, творческого подхода к решению задач, что позволяет рассматривать подростковый возраст как сенситивный период для развития творческого мышления.

Социальная ситуация как условие развития и бытия в подростковом возрасте принципиально отличается от социальной ситуации в детстве не столько по внешним обстоятельствам, сколько по внутренним причинам.

Подросток продолжает жить в семье, учиться в школе, он окружен по большей части теми же сверстниками. Однако сама социальная ситуация трансформируется в его сознании в совершенно новые ценностные ориентации - подросток начинает интенсивно рефлексировать на себя, на других, на общество. Теперь уже иначе расставляются акценты: семья, школа, сверстники обретают новые значения и смыслы. Для подростка происходят сдвиги в шкале ценностей. Все освещается проекцией рефлексии, прежде всего самые близкие: дом, семья.

В условиях семьи подросток, как правило, живет вместе со своей семьей, но наступает пора оценок близких.

Набирая опыт жизни, подросток открывает для себя многообразные семейные отношения, которые отличаются от родительской семьи. Он испытывает потребность в более универсальной, более широкой идентичности и одновременно в укреплении своего собственного чувства личности, в обособлении своего «Я» от семейного «Мы». Сама семья занимает прежние позиции по отношению к подростку.

Обычно семья относится к подростку в соответствии со сложившимися семейными (и родовыми) традициями.

Семья с высокой рефлексией и ответственностью понимает, что ребенок взрослеет и что с этим надо считаться, изменяя стиль взаимоотношений. К подростку начинают относиться с учетом появившегося у него чувства взрослости.

Не навязывая своего внимания, родители выражают готовность обсудить его проблемы. В таком ключе взрослые из хорошо рефлексирующих семей выражают готовность к сотрудничеству с подростком. Главное в такой семье - сохранение столь желанного для отрочества чувства самоуважения.

Характер подростка из семьи с высокой рефлексивностью и ответственностью развивается вполне благополучно (если, конечно, здесь нет угнетающих это развитие предпосылок). Он строит свои отношения с окружающими (взрослыми и сверстниками) преимущественно по адекватно лояльному типу.

Ценностные ориентации подростка в такой семье направлены на проникновение в ценности всего многообразия реальной действительности: предметного мира, образно-знаковых систем, природы, самого социального пространства непосредственных отношений людей. Высокая рефлексия окружения создает благоприятные условия для духовного развития подростка.

Семья отчужденная. В этой семье к подростку относятся так же, как и в детстве - им мало интересуются, избегают общения с ним и держатся от него на расстоянии. Отчужденные родители уже сделали свой вклад в развитие характера своего ребенка: он или тоже стал носителем отчужденных форм поведения и обладателем отчужденной души, или у него сложился горький комплекс собственной неполноценности. Тенденции развития его характера как способа взаимодействия с другими людьми уже отчетливо проявляют себя: превалируют нигилистические реакции, агрессия или неадекватная лояльность, пассивный стиль поведения.

Подросток в такой семье чувствует себя лишним. По большей части он устремляется на улицу к своим сверстникам, где ищет удовлетворения в общении. Стиль общения со сверстниками дублирует, как правило, способы его взаимодействия в семье. Отчужденная семья может ограничить возможности ребенка в развитии.

Семья авторитарная по сложившимся стереотипам продолжает предъявлять подростку те же жесткие требования, что и в детстве. Обычно, если это было принято ранее, здесь продолжают применять и физические наказания (в детстве - шлепали, теперь могут «врезать»).

В авторитарной семье подросток так же одинок, несчастен и неуверен в себе, как и в детстве. Однако тенденции развития его характера уже отчетливо вырисовываются: он становится носителем авторитарного способа взаимодействия с людьми или, напротив, демонстрирует униженную неадекватную лояльность, пассивность, за которой стоит высокая невротизация неуверенного в себе подростка. Авторитарная семья также может ограничить возможности подростка в развитии.

Семья с попустительским отношением. В такой семье продолжает господствовать принцип вседозволенности: подросток уже давно «сел на голову» родителям и хорошо освоил способы манипулирования ими.

Эгоизм и сопутствующая ему конфликтность - основные характеристики характера подростков из таких семей. Здесь подросток несчастлив вдвойне: сам по себе возраст - уже кризис личностного развития плюс еще недостатки, сформированные в его личностной позиции отношениями вседозволенности, чего ему никогда не предложит действительная жизнь.

Семья гиперопекающая. Подросток в такой семье вырос под пристальным вниманием и заботой родителей, у которых масса своих внутренних проблем, возникающих по большей части на основе личных трагедий и комплексов.

С подростком родители по-прежнему не расстаются, опекают его не только извне, но стремятся завладеть и его душевными переживаниями. Здесь

подросток, как и в детстве, не уверен в себе. В случае необходимости он не может дать отпор, но и не может сам построить позитивные отношения. Он пассивен, принужденно лоялен. Он инфантилен по своим социальным реакциям и на эту его особенность уже реагируют сверстники, дающие ему детские прозвища типа «Малыш», «Маменькин сынок», «Детский сад» и др.

Описанные стили отношений к подростку демонстрируют лишь тенденции условий развития личности в подростковом возрасте. Реальная жизнь может быть мягче, благополучнее, но и жестче, ужаснее, непостижимее.

В семье может быть одновременно множество разнообразных стилей общения, обусловленных неоднородностью культурных уровней ее членов (дедушек, бабушек, родителей, других родственников). Подросток может стремиться к идентификации со своими родителями, но может занимать и отчужденную позицию.

Прежде всего мышление является высшим познавательным процессом. Оно представляет собой порождение нового знания, активную форму творческого отражения и преобразования человеком действительности.

Мышление порождает такой результат, какого ни в самой действительности, ни у субъекта на данный момент времени не существует. Мышление (в элементарных формах оно имеется и у животных) также можно понимать, как получение новых знаний, творческое преобразование имеющихся представлений.

Отличие мышления от других психологических процессов состоит также в том, что оно почти всегда связано с наличием проблемной ситуации, задачи, которую нужно решить, и активным изменением условий, в которых эта задача задана. Мышление в отличие от восприятия выходит за пределы чувственно данного, расширяет границы познания.

В мышлении на основе сенсорной информации делаются определенные теоретические и практические выводы. Оно отражает бытие не только в виде отдельных вещей, явлений и их свойств, но и определяет связи, существующие между ними, которые чаще всего непосредственно, в самом восприятии человеку

не даны. Свойства вещей и явлений, связи между ними отражаются в мышлении в обобщенной форме, в виде законов, сущностей.

На практике мышление как отдельный психический процесс не существует, оно незримо присутствует во всех других познавательных процессах: в восприятии, внимании, воображении, памяти, речи. Высшие формы этих процессов обязательно связаны с мышлением, и степень его участия в этих познавательных процессах определяет их уровень развития.

Мышление - это движение идей, раскрывающее суть вещей. Его итогом является не образ, а некоторая мысль, идея. Специфическим результатом мышления может выступить понятие - обобщенное отражение класса предметов в их наиболее общих и существенных особенностях.

Мышление - это особого рода теоретическая и практическая деятельность, предполагающая систему включенных в нее действий и операций ориентировочно-исследовательского, преобразовательного и познавательного характера.

Рассмотрим виды мышления:

Теоретическое понятийное мышление - это такое мышление, пользуясь которым человек в процессе решения задачи обращается к понятиям, выполняет действия в уме, непосредственно не имея дела с опытом, получаемым при помощи органов чувств. Он обсуждает и ищет решение задачи с начала и до конца в уме, пользуясь готовыми знаниями, полученными другими людьми, выраженными в понятийной форме, суждениях, умозаключениях. Теоретическое понятийное мышление характерно для научных теоретических исследований.

Теоретическое образное мышление отличается от понятийного тем, что материалом, который здесь использует человек для решения задачи, являются не понятия, суждения или умозаключения, а образы. Они или непосредственно извлекаются из памяти, или творчески воссоздаются воображением. Таким мышлением пользуются работники литературы, искусства, вообще люди творческого труда, имеющие дело с образами. В ходе решения мыслительных задач соответствующие образы мысленно преобразуются так, чтобы человек в

результате манипулирования ими смог непосредственно усмотреть решение интересующей его задачи.

Оба рассмотренных вида мышления - теоретическое понятийное и теоретическое образное - в действительности, как правило, сосуществуют. Они неплохо дополняют друг друга, раскрывают человеку разные, но взаимосвязанные стороны бытия. Теоретическое понятийное мышление дает хотя и абстрактное, но вместе с тем наиболее точное, обобщенное отражение действительности. Теоретическое образное мышление позволяет получить конкретное субъективное ее восприятие, которое не менее реально, чем объективно-понятийное. Без того или другого вида мышления наше восприятие действительности не было бы столь глубоким и разносторонним, точным и богатым разнообразными оттенками, каким оно является на деле.

Отличительная особенность следующего вида мышления наглядно-образного состоит в том, что мыслительный процесс в нем непосредственно связан с восприятием мыслящим человеком окружающей действительности и без него совершаться не может. Мысля наглядно образно, человек привязан к действительности, а сами необходимые для мышления образы представлены в его кратковременной и оперативной памяти (в отличие от этого образы для теоретического образного мышления извлекаются из долговременной памяти и затем преобразуются).

Последний из видов мышления - это наглядно-действенное. Его особенность заключается в том, что сам процесс мышления представляет собой практическую преобразовательную деятельность, осуществляемую человеком с реальными предметами. Основным условием решения задачи в данном случае являются правильные действия с соответствующими предметами. Этот вид мышления широко представлен у людей, занятых реальным производственным трудом, результатом которого является создание какого-либо конкретного материального продукта.

Перечисленные виды мышления выступают одновременно и как уровни его развития. Теоретическое мышление считается более совершенным, чем

практическое, а понятийное представляет собой более высокий уровень развития, чем образное.

Подростковый возраст характеризуется продолжающимся развитием общих и специальных способностей детей на базе основных ведущих видов деятельности: учения, общения и труда. В учении формируются общие интеллектуальные способности, особенно понятийное теоретическое мышление. Это происходит за счет усвоения понятий, совершенствования умения пользоваться ими, рассуждать логически и абстрактно. Значительный прирост предметных знаний создает хорошую базу для последующего развития умений и навыков в тех видах деятельности, где эти знания практически необходимы.

В подростковом и раннем юношеском возрасте завершается формирование когнитивных процессов, и прежде всего мышления. В эти годы мысль окончательно соединяется со словом, в результате чего образуется внутренняя речь как основное средство организации мышления и регуляции других познавательных процессов. Интеллект в своих высших проявлениях становится речевым, а речь - интеллектуализированной. Возникает полноценное теоретическое мышление.

Наряду с этим идет активный процесс формирования научных понятий, содержащих в себе основы научного мировоззрения человека в рамках тех наук, которые изучаются в школе.

Приобретают окончательные формы умственные действия и операции с понятиями, опирающиеся на логику рассуждений и отличающие словесно-логическое, абстрактное мышление от наглядно-действенного и наглядно-образного.

С точки зрения психолого-педагогических возможностей развития, которыми обладают школьники средних и старших классов, с позиций совершенствования обучения и научения на этот вопрос следует дать утвердительный ответ.

Интеллектуальное развитие детей можно ускорить по трем направлениям:

1. понятийный строй мышления,

2. речевой интеллект,
3. внутренний план действий.

Развитию мышления в старших классах школы может способствовать такой вид занятий, до сих пор, к сожалению, слабо представленный в общеобразовательной школе, как риторика, понимаемая в качестве умения планировать, составлять и произносить публичные речи, вести дискуссию, умело отвечать на вопросы.

Большую пользу могут сыграть разные формы письменного изложения мысли, применяемые не только на занятиях языком и литературой (в форме традиционного изложения или сочинения), но и другими школьными предметами. Они вполне могут быть использованы на занятиях по математике, в частности и в стереометрии при решении задачи на построение на этапе анализа условия задачи и на этапе исследования возможных путей решения. При этом важно оценивать не только содержание, но и форму изложения материала.

Ускоренного образования научных понятий можно добиться на занятиях специальными предметами, где соответствующие понятия вводятся и изучаются. При представлении учащемуся любого понятия, в том числе и научного, важно обратить внимание на следующие моменты:

а) почти каждое понятие, в том числе и научное, имеет несколько значений;

б) обычные слова из повседневно используемого языка, который употребляется и для определения научных понятий многозначны и достаточно точны для того, чтобы определить объем и содержание не научного понятия. Поэтому любые определения понятий через слова обыденного языка могут быть только приблизительными;

в) отмеченные свойства допускают как вполне нормальное явление существование различных определений одних и тех же понятий, полностью совпадающих друг с другом, и это относится даже к самым точным наукам, таким, как математика и физика;

г) для одного и того же человека по мере его развития, а также науки и представляющих ее ученых по мере их проникновения в суть изучаемых явлений, объем и содержание понятий, естественно, меняются. Произнося одни и те же слова через значительный период времени, мы обычно вкладываем в них несколько различный, со временем меняющийся смысл.

Из этого следует, что в средних и старших классах школы учащиеся не должны механически учить и повторять застывшие определения научных понятий. Скорее следует добиваться того, чтобы сами учащиеся находили и давали определения этих понятий. Это, несомненно, ускорит процесс развития понятийной структуры мышления у старшеклассников.

Становлению внутреннего плана действий могут помочь специальные упражнения, направленные на то, чтобы одни и те же действия как можно чаще совершались не с реальными, а с воображаемыми предметами, т. е. в уме. Например, на занятиях математикой следует побуждать учащихся к тому, чтобы они больше считали не на бумаге или с помощью калькулятора, а про себя, находили и четко формулировали принцип и последовательные шаги в решении некоторой задачи прежде, чем практически приступят к реализации найденного решения.

Надо придерживаться правила: до тех пор, пока решение до конца не продумано в уме, пока не составлен план включенных в него действий и пока он не выверен на логичность, к практическому осуществлению решения не следует приступать. Этими принципами и правилами можно пользоваться на занятиях всеми без исключения школьными предметами, тогда и внутренний план действий будет формироваться у учащихся быстрее.

Характерной особенностью подросткового возраста является готовность и способность ко многим различным видам обучения, причем как в практическом плане (трудовые умения и навыки), так и в теоретическом (умение мыслить, рассуждать, пользоваться понятиями). Еще одной чертой, которая впервые полностью раскрывается именно в подростковом возрасте, является склонность

к экспериментированию, проявляющаяся, в частности, в нежелании все принимать на веру.

Подростки обнаруживают широкие познавательные интересы, связанные со стремлением все самостоятельно перепроверить, лично удостовериться в истинности. К началу юношеского возраста такое желание несколько уменьшается, и вместо него появляется больше доверия к чужому опыту, основанного на разумном отношении к его источнику.

Подростковый возраст отличается повышенной интеллектуальной активностью, которая стимулируется не только естественной возрастной любознательностью подростков, но и желанием развить, продемонстрировать окружающим свои способности, получить высокую оценку с их стороны.

В этой связи подростки на людях стремятся брать на себя наиболее сложные и престижные задачи, нередко проявляют не только высокоразвитый интеллект, но и незаурядные способности. Для них характерна эмоционально-отрицательная аффективная реакция на слишком простые задачи. Такие задачи их не привлекают, и они отказываются их выполнять из-за соображений престижности.

В основе повышенной, интеллектуальной и трудовой активности подростков лежат не только указанные выше мотивы. За всем этим можно усмотреть и естественный интерес, повышенную любознательность детей данного возраста. Вопросы, которые задает подросток взрослым детям, учителям и родителям, нередко достаточно глубоки и касаются самой сути вещей.

Подростки могут формулировать гипотезы, рассуждать предположительно, исследовать и сравнивать между собой различные альтернативы при решении одних и тех же задач.

Сфера познавательных, в том числе учебных, интересов подростков выходит за пределы школы и приобретает форму познавательной самодеятельности - стремления к поиску и приобретению знаний, к формированию полезных умений и навыков.

Подростки находят занятия и книги, соответствующие их интересам, способные дать интеллектуальное удовлетворение. Стремление к самообразованию - характерная особенность и подросткового, и раннего юношеского возраста.

Мышление подростка характеризуется стремлением к широким обобщениям.

Самостоятельность мышления проявляется в независимости выбора способа поведения.

Подростки и особенно юноши принимают лишь то, что лично им кажется разумным, целесообразным и полезным.

Результатом обучения математике, прежде всего, является формирование различных видов познавательной деятельности или отдельных её элементов: понятий, представлений, различных умственных действий.

Формирование познавательной деятельности непосредственно связано с процессом усвоения, так как процесс усвоения знаний - это всегда выполнение учащимися определённых познавательных действий.

При планировании усвоения любых знаний необходимо определить, в какой деятельности (в каких умениях) они должны использоваться учениками, с какой целью они усваиваются. Учитель должен быть уверен, что учащиеся владеют всей необходимой в данном случае системой действий, составляющих умение учиться.

Особое внимание при обучении математике, в частности геометрии, нужно уделять принципу развивающего обучения. Среди развивающих задач обучения геометрии особо выделяются следующие:

Развитие мышления - одна из основных задач геометрии. Логика геометрии заключена не только в отдельных формулировках и доказательствах, но и во всей системе в целом.

Развитие пространственного воображения - расширяет видение мира. Оно обогащает внутренний мир человека, давая ему возможность создавать в себе и

созерцать разнообразные картины. Развитие пространственного воображения - это важный элемент общей культуры.

Развитие познавательного интереса к геометрии - необходимо проведение целенаправленной работы по формированию устойчивого интереса учащихся к овладению знаниями.

Наличие познавательных интересов учащихся способствует росту их активности на уроках, повышению качества знаний, формированию положительных мотивов учения, активной жизненной позиции, что в совокупности вызывает повышение эффективности всего процесса обучения.

Развитие творческих способностей, необходимых каждому человеку. Чем шире круг знаний человека, тем продуктивнее его творческая деятельность. Творчество высшая форма активности и самостоятельности.

При отборе содержания, соответствующего профилю обучения, необходимо стремиться к научности материала.

Принцип научности имеет отношение и к методам педагогической деятельности и деятельности детей.

В соответствии с этим принципом процесс обучения математики должен быть направлен на развитие познавательной активности учащихся, на формирование у них умений и навыков научного поиска, на ознакомление их со способами научной организации учебного труда.

Этому способствует широкое использование проблемных ситуаций при изучении геометрии. Суть проблемной интерпретации учебного материала состоит в том, что преподаватель не сообщает знаний в готовом виде, но ставит перед учащимися проблемные задачи, побуждая искать пути и средства их решения.

Вопрос о применении теоретических знаний на практике, применение абстрактных теоретических фактов при решении задач относительно конкретных, реальных объектов ставит учащегося в проблемную ситуацию. Ученик вынужден либо самостоятельно осуществлять мыслительный поиск, либо с помощью преподавателя.

Но при создании проблемных ситуаций на уроках геометрии необходимо учитывать реальные возможности учащихся в соответствии с принципом доступности и посильности обучения. При предъявлении недоступного для усвоения материала резко снижается мотивационный настрой на учение, падает работоспособность, быстро наступает утомление.

Чрезмерное упрощение математического материала тоже снижает интерес к учению, не способствует формированию учебных навыков и, главное, не содействует развитию учащихся.

Изложение материала должно быть последовательным и образовывать некоторую систему, то есть отвечать требованиям преемственности, последовательности и систематичности.

Преемственность в обучении математики предполагает такую организацию педагогического процесса, при которой тот или иной урок является логическим продолжением предыдущего.

Последовательность и систематичность в обучении позволяют разрешить противоречие, где, с одной стороны, необходимость формирования системы знаний, умений и навыков по предметам, а с другой - необходимость формирования целостного мировоззрения о единстве и обусловленности окружающего мира.

Обучение, соответствующее выбранному профилю характеризуется сознательностью, так как отвечает потребностям учащегося. Содержание обучения, отвечающие индивидуальным способностям и склонностям ученика, возбуждает активность учащегося.

Активность должна быть направлена не столько на простое запоминание и проявление внимания, сколько на сам процесс самостоятельного добывания знаний. В обучении геометрии решающее значение имеет овладение теоретическими знаниями, а это значит их осмысление и усвоение на понятийном уровне и осознание прикладного значения теоретических идей.

В связи с этим необходимо отметить, значительное увеличение роли наглядности в процессе обучения.

Наиболее приемлемыми формами работы, методами и средствами обучения учащихся в данной ситуации являются те, которые позволяют через физические действия с материальными объектами переходить к общим выводам; учат в конкретных объектах и явлениях реальной действительности видеть возможность применения общих закономерностей формул.

Наглядность в процессе обучения основана на закономерностях познания окружающей действительности и развития мышления, которое развивается от конкретного к абстрактному.

Научные понятия и абстрактные положения легче доходят до учащихся, если они подкрепляются конкретными фактами в процессе сравнения, проведения аналогий и т. п.

Наглядность в процессе обучения геометрии обеспечивается применением разнообразных иллюстраций, демонстраций, лабораторно - практических работ, использованием ярких примеров и жизненных фактов.

По линии возрастания абстрактности виды наглядности подразделяются следующим образом:

естественная - абстрактные геометрические объекты и положения иллюстрируются примерами предметов из объективной реальности, данный вид наглядности наиболее распространён в силу простоты реализации;

экспериментальная - абстрактные геометрические положения подтверждаются в ходе специально организованных опытов, экспериментов.

Обучение в рамках профильной дифференциации предоставляет возможность организовывать лабораторно-практические работы, выполнение которых даёт наглядное экспериментальное подтверждение многих положений геометрии;

объёмная - демонстрация моделей геометрических тел;

демонстрация параллельно с формальным описанием и чертежом объёмной модели стереометрического тела значительно усиливает эффективность обучения;

изобразительная - иллюстрация абстрактных геометрических объектов и положений картинками, фотографиями, рисунками;

символическая и графическая - использование схем, формул для демонстрации взаимосвязи и других отношений между теми или иными понятиями.

Чтобы не сдерживать развитие абстрактного мышления учащихся, в использовании наглядности важно чувство меры. Большое значение имеет сочетание применения наглядности с творческой работой детей по созданию наглядных пособий.

В использовании наглядности должна быть вариативность, чтобы в сознании учеников не запечатлелся какой-либо конкретный образ предмета или явления. Так, некоторые учащиеся испытывают затруднения при работе с цилиндром, если он расположен горизонтально, если все теоретические факты относительно цилиндра и его свойств иллюстрировались на цилиндре, имеющем вертикальное положение.

Обучение геометрии с одной стороны базируется на рекомендациях и принципах общей методики преподавания математики, педагогики и психологии. С другой стороны, обладает своей спецификой, связанной, прежде всего с контингентом обучающихся и отбором содержания, соответствующего профилю обучения. Эта специфика определяется возрастными, психологическими и социальными особенностями учащихся их склонностями, предпочтениями, направленностью личности.

1.2 Задачи в школьном курсе планиметрии

Геометрические задачи не только дают возможность основательно изучить геометрию, но и прививают такие навыки и способности, которые весьма полезны каждому, так как облегчают изучение других предметов и помогают решать различные вопросы науки, техники, искусства и обыденной жизни.

Основные виды задач и подходы к их решению.

В геометрии рассматриваются три основных вида задач:

— задачи на доказательство;

— задачи на вычисление;

— задачи на построение.

Решение этих задач рассматривается на фоне самых разнообразных геометрических фигур и их конфигураций, таких как «параллельные прямые и углы», «треугольники и окружность», «окружность и углы» и другие.

Основными фигурами геометрии являются треугольник — «клетка геометрии» и окружность — «душа геометрии».

Решение задач и упражнений, объединённых одним геометрическим сюжетом, можно выполнять уже на первых этапах изучения геометрии. При этом необходимо иметь в виду два подхода к решению задач — аналитический и синтетический.

Аналитическим подходом пользуются в основном при решении задач на построение, а синтетический подход широко применяется в геометрических задачах на доказательство и на вычисление. При этом подходе в процессе решения задач последовательно используются известные факты, которые называют опорными

Говоря о значении геометрических задач, следует обратить внимание на следующие моменты.

I. Решение геометрических задач является одним из надёжных способов систематического повторения приобретённых сведений по геометрии.

Действительно, при решении геометрических задач ученик должен теоретически обосновывать правильность каждого своего действия.

Необходимость доказывать правильность геометрических построений вынуждает учащегося непрестанно повторять приобретённые сведения по геометрии, в результате чего эти сведения прочно закрепляются в его памяти.

Учащиеся лучше усваивают геометрию в том случае, если проработка её теорем и вытекающих из них следствий сопровождается систематическим решением соответствующих геометрических задач.

II. Геометрические задачи заставляют учащегося обстоятельнее и глубже разобраться в известных ему сведениях по геометрии.

Уже на первых уроках геометрии ученику сообщается понятие об окружности как о геометрическом месте точек (ГМТ) на плоскости, равноотстоящих от данной точки на той же плоскости.

По мере дальнейшего прохождения геометрии и выполнения задач ученик узнаёт, что окружность и её части (дуги) являются в то же время и другими геометрическими местами точек. Действительно, учащийся убеждается, что:

1) окружность - ГМТ, из которых каждая является центром окружности данного радиуса, проходящей через данную точку,

2) окружность - ГМТ, из которых данная окружность видна под данным углом,

3) окружность - ГМТ, расстояния которых до двух точек А и В находятся в одном и том же отношении,

4) окружность - ГМТ, сумма квадратов расстояний, которых от двух данных точек есть данная величина и т. д.

III. Геометрические задачи побуждают учащегося давать практическое применение имеющимся у него сведениям по геометрии.

Например, если требуется найти в треугольнике такую точку, из которой все три стороны видны под одним и тем же углом, то для решения этой задачи учащийся вынужден дать практическое применение следующим имеющимся у него сведениям:

1) Лучи, выходящие из одной точки, на плоскости образуют прилежащие углы, сумма которых равна 360°.

2) Построение угла, равного 120°.

3) Построение сегмента, опирающегося на данный отрезок и вмещающего данный угол.

IV. Решение геометрических задач помогает учащимся лучше изучить черчение.

Осуществляя требуемое задачей построение, учащиеся неизбежно выполняют ряд таких операций, которые, в сущности, относятся к черчению. И вполне понятно, что преподаватель математики, требуя от учеников аккуратного выполнения пояснительных чертежей, сопровождающих решение геометрических задач, способствует выработке у учащихся необходимых чертёжных навыков.

V. Геометрические задачи в стереометрии способствуют развитию пространственных представлений.

Выполняя хорошо подобранные упражнения по геометрии, среди которых задачи играют главную роль, ученики приобретают следующие ценные качества: во-первых, способность отчётливо представлять себе пространственные геометрические образы и, во-вторых, умение мысленно выполнять операции над воображаемыми геометрическими линиями, фигурами, поверхностями и телами.

Эти качества весьма облегчают изучение начертательной геометрии. Геометрические, развивая пространственные представления, облегчают учащимся изучение химии, физики, астрономии.

VI. Геометрические задачи более, чем другие математические задачи, приучают учащихся средней школы дисциплинировать своё внимание.

Учеников не затрудняют только те геометрические задачи, решение которых сводится к выполнению какого-нибудь элементарного построения. Что касается остальных задач этого рода, то в подавляющем большинстве они ученикам представляются трудными, подобными замысловатым ребусам или загадкам.

Ученики, стремясь найти решение затрудняющей их геометрической задачи, вынуждены сосредоточивать всё своё внимание на её условии, на свойствах и зависимостях тех геометрических образов, которые входят в набросок предполагаемого решения.

VII. Геометрические задачи прививают учащимся навык целеустремлённо припоминать.

Решая геометрическую задачу, учащемуся приходится не просто припоминать всё, что он усвоил по геометрии, а именно тот круг сведений, к которому относится данная задача.

Геометрические задачи побуждают учащегося целеустремлённо припоминать и в процессе этого проявлять логичность рассуждений, так как из припоминаемого необходимо отбирать лишь то, что даёт возможность решить возникший вопрос.

Кроме того, решение геометрических задач приводит к тому, что память учащегося из пассивной хранительницы разных сведений превращается в активную помощницу, облегчающую решение различных теоретических и практических вопросов.

VIII. Геометрические задачи приучают учеников проявлять инициативу, изобретательность.

Пусть требуется, например, через две данные точки провести окружность, касающуюся данной прямой KL.

Затем, принимая во внимание, что KL является касательной к искомой окружности, учащийся начинает перебирать в своей памяти всё, что относится к касательной.

Среди других сведений он вспоминает следующее: если из какой-нибудь точки, находящейся вне круга, проведём секущую и касательную к нему, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

Инициативу и изобретательность учащийся вынужден проявить при решении трудной геометрической задачи и при отыскании новых способов получения требуемого построения.

IX. Геометрические задачи приучают учащихся проявлять настойчивость в достижении намеченной цели

При умелой постановке преподавания геометрии учащиеся охотно решают не только задачи, помещённые в стабильных учебниках и задачниках, но и те задачи этого рода, которые встречаются в других учебных пособиях, причём при

отыскании требуемого построения не останавливаются перед затратой значительного времени и труда.

X. Геометрические задачи приучают учащихся логически рассуждать.

Учащийся ставит перед собою определённую цель: выполнить требуемое в задаче. Для достижения этой цели ему приходится прежде всего хорошо вдуматься в содержание условия задачи и припомнить необходимые сведения из геометрии.

Учащийся должен, во-первых, логически обосновывать правильность каждой из отдельных операций, во-вторых, логическими рассуждениями установить, всегда ли рассматриваемая задача имеет решение и сколько она допускает решений в отдельных случаях.

XI. Принимая во внимание, какую роль играют геометрические задачи на в усвоении геометрии и развитии мышления, надо предлагать эти задачи в течение всего времени прохождения курса геометрии, начиная от самых лёгких и постепенно переходя к более сложным.

Для этой цели надо использовать не только те геометрические задачи, которые приведены в стабильном учебнике в конце каждого раздела, но и подходящие задачи, взятые из других пособий.

1.3 Психологические особенности изучения стереометрии в школе

Стереометрия относится к одним из сложнейших разделов школьного курса математики (геометрии, в частности). Сложность стереометрии в первую очередь обусловлена спецификой этого раздела.

При изучении некоторых тем стереометрии многие учащиеся сталкиваются с проблемами восприятия трехмерных объектов и их свойств. Навыки черчения и ориентации на плоскости не всегда помогают в правильном понимании физических характеристик объектов в пространстве. К тому же, большинство учащихся вовсе не могут представить некоторые параметры трехмерных объектов [7].

Восприятие трехмерных объектов опосредовано пространственным мышлением, под которым понимается вид умственной деятельности, обеспечивающий создание пространственных образов. Это мышление интерпретируется в терминах изображений, оно обеспечивает оперирование этими изображениями в процессе решения задач [2].

Если в планиметрии пространственное мышление оперирует образами, отображенными в двухмерном пространстве (на плоскости), то в стереометрии эти образы отображаются в трехмерной форме. Основной трудностью для обучающихся является восприятие трехмерных объектов, изображенных на плоскости [4].

Функционирование пространственного мышления при изучении стереометрии особенно важно при решении стереометрических задач, связанных с построением сечений. Если пространственное мышление недостаточно развито, то обучающийся не способен решать такие задачи [13].

Недостаточное развитие пространственного мышления препятствует также решению стереометрических (и планиметрических) задач, связанных с проекциями [19].

Именно поэтому развитие пространственного мышления считается важной целью обучения геометрии в школе. Современные компьютерные технологии значительно облегчают процесс достижения этой цели [16].

Однако не только пространственное мышление служит инструментарием для решения стереометрических задач. Расчетные стереометрические задачи требуют развитого математического мышления. Известный немецкий математики Г. Вейль понимал под математическим мышлением предельно абстрактное, теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранились заданные между ними отношения [25].

Математическое мышление характеризуется комплексностью, целостностью и обеспечивает формирование математических способностей.

Однако о целостности математического мышления можно говорить тогда, когда оно в качестве компонента включает пространственное мышление [21].

Развитие математического мышления и математических способностей происходит одновременно, и этим обеспечивается неразрывная связь между мыслительными и познавательными процессами, что очень важно при обучении математике [22].

На уроках стереометрии математическое мышление развивается при решении стереометрических задач. Однако степень его развития зависит не только от типа задач, но также и от методов их решения.

Не менее важной психической функцией в освоении стереометрии является память. Как правило, наибольших успехов в освоении стереометрии достигают обучающиеся с развитой зрительной памятью (зрительный психотип). Такие обучающиеся легко запоминают рисунки, модели [17].

Таким образом, обучение стереометрии – сложный процесс, опирающийся на различные психические функции.

1.2 Подходы к методологии решения стереометрических задач

За последние десятилетия ведется поиск эффективных методов обучения стереометрии в школе. Основной упор делается на обучении решению стереометрических задач.

Долгое время в дидактике математики господствовал традиционный алгоритмический подход. Согласно данному подходу, учитель представляет формулы, алгоритмы и правила, а обучающиеся алгоритмизированно решают задачи. Такой подход оказался не совсем эффективным [1].

Еще одним подходом к обучению стереометрии служил фузионистический подход, описанный такими исследователями, как Г.А. Клековкин [8] и Г.Г. Левитас [10]. Данный подход подразумевает интегрированное обучение различным разделам математики. Сторонники данного подхода требовали внести значительные изменения в курс школьной геометрии – в частности, не разделять его на разделы «Планиметрия» и «Стереометрия».

В.А. Гусев [3] и Ю.М. Колягин [9] опираются в методике обучения стереометрии на системно-аналитический подход, который подразумевает работу с учебником и учебными пособиями. Проблема применения данного подхода к обучению стереометрии связана с плохим качеством большинства учебников по геометрии.

Что касается непосредственно решения стереометрических задач, то здесь также актуализируется несколько подходов.

Важным подходом к методике решения стереометрических задач является наглядно-деятельностный подход. Его описывают в своих трудах О.Б. Епишева [6], Н.В. Метельский [11], И.В. Прояева [14]. Сущность данного подхода заключается в развитии умения отображать условие задачи с помощью рисунка. Рисунок – это неотъемлемая часть стереометрической задачи. Однако при наглядно-деятельностном подходе обучающиеся формируют рисунок самостоятельно, опираясь на условия.

Обобщающий подход к методике решения стереометрических задач описан Е.И. Саниной [15]. Данный подход предполагает постоянное, системное возвращение к ранее изученному материалу, а также использования принципа последовательного перехода от простого к сложному.

Наиболее интересным нам кажется подход, связанный с технологией обучения математике на основе решения задач. Технология обучения математике на основе решения задач была разработана учителем общеобразовательной школы республики Башкортостан Р.Г. Хазанкиным. Сам Р.Г. Хазанкин писал, что в основу данной технологии положено высказывание Д. Лойа «Чтобы научить решать задачи, надо их решать» [24, с. 77].

Р.Г. Хазанкиным были сформулированы базовые концепции технологии («заповеди»). Эти «заповеди» касаются:

– использования теории для решения практических задач; расширения межпредметных связей математики;

– систематического использования теоретических знаний для решения задач;

– воспитания исследователя;

– формирования умения догадываться;

– формирования способности продолжать работу с задачей;

– формирования способности видеть «красоту» математики;

– формирования умения составлять задачи;

– воспитания желания работать с источниками; организации «математического» общения на уроках и во внеурочной деятельности [23].

Технология Р.Г. Хазанкина, безусловно, заслуживает внимания в дидактическом плане. Глубинный анализ технологии позволяет выделить как ее плюсы, так и минусы.

К плюсам технологии следует отнести:

1) актуализацию применения знаний на практике;

2) использование проблемно-развивающих методов обучения;

3) разнообразие форм работы;

4) сочетание коллективных и индивидуальных подходов к обучению;

5) развитие ответственности и самостоятельности.

Однако следует также выделить и минусы:

1) сложность организации уровневого взаимодействия обучающихся;

2) необходимость придерживаться строгих алгоритмов организации учебно-познавательной деятельности [20].

Технология обучения математике на основе решения задач формировалась как самостоятельный подход одновременно с актуализацией в отечественной системе математического образования проблемно-развивающего подхода.

Сегодня под проблемным обучением понимается такая организация учебных занятий, которая предполагает создание под руководством учителя проблемных ситуация и активную самостоятельную деятельность учащихся по их разрешению, в результате чего и происходит творческое овладение профессиональными знаниями, навыками, умениями и развитие мыслительных способностей.

В основу проблемного обучения заложена идея творческого развития обучающихся. Обучающиеся не получают готовых знаний, а учатся приобретать их самостоятельно под руководством учителя.

При проблемном обучении учебная деятельность обращается в учебно-познавательную деятельность.

В.В. Давыдов выделил две основные особенности проблемного обучения:

1) учебная задача преподносится как проблема, которую обучающиеся должны разрешить;

2) взаимодействие обучающихся с учителем носит исключительно субъект-субъектный характер по типу «начинающий исследователь/научный руководитель» [5].

Эти особенности позволяют определить базовые принципы проблемного обучения как современной образовательной технологии.

На проблемном подходе к решению стереометрических задач основан проектный подход. Каждая стереометрическая задача – это определенный математический проект, целью создания которого является разрешение учебной проблемы, сформулированной в вопросе задачи [12].

Еще одним подходом, тесно связанным с проблемно-развивающим, является метапредметный подход. Данный подход подразумевает формирование у обучающихся в процессе решения стереометрических задач метапредметных компетенций.

И.М. Смирнова, замечая метапредметность геометрии, пишет, что эта метапредметность заключается в том, что геометрия «нужна каждому человеку для правильного понимания окружающей нас действительности, для умения ориентироваться в ней», и в том, что геометрия «обладает метасодержанием, необходимым для пропорционального развития обоих полушарий головного мозга человека» [18, с. 95].

Таким образом, существует несколько подходов к методике решения стереометрических задач, однако наибольшую эффективность продемонстрировал проблемно-развивающий подход.

Выводы по первой главе

1. Формирование навыка решения стереометрических задач – это процесс, который опирается, прежде всего, на целостное математическое мышление, включающее пространственные мыслительные процессы в качестве компонентов. Математическое мышление необходимо при решении стереометрических задач, однако оно одновременно развивается в процессе их решения.

2. Среди всех подходов, способствующих развитию математического мышления, особо выделен проблемно-развивающий подход, который связан в системе решения стереометрических задач с проектным и метапредметным подходами.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В типологии математических задач, представленной в [1 с. 103] одним из первых рассматривается деление их по признаку математического содержания.

Если условие и заключение задачи принадлежат определенному разделу математики, то она принадлежит одному из следующих типов - арифметические, алгебраические, геометрические, тригонометрические, комбинаторные и т. д.

Геометрические задачи составляют в этой типологии отдельный класс задач, специфические особенности которых мы и рассмотрим.

2.1 Геометрическая задача: понятие, структура, решение

Одной из важнейших характеристик овладения математикой на том или ином уровне является умение решать задачи, причем не только стандартные, но и «требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности» [17 с. 16].

Говоря о геометрической задаче, напомним некоторые положения общей теории задач в обучении математике, конкретизируя их, где это возможно и целесообразно, на задачах геометрического характера.

Примем следующее понятие задачи: **задача** - это требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь на те условия, которые указаны в задаче, и/или учитывая их [23 с. 6].

Математическая задача - это задача, сформулированная на математическом языке, а геометрическая задача - это задача, сформулированная на геометрическом языке.

Иногда задача формулируется на житейском, бытовом или профессиональном языке нематематической отрасли знаний, но решается математическими (геометрическими) средствами. Тогда прежде чем решать, ее надо перевести на математический (геометрический) язык.

Такого рода задачи очень важны в процессе формирования компетенций. Однако они очень редко встречаются в учебниках математики (геометрии) или в сборниках математических (геометрических) задач.

Иногда условием задачи называют всю формулировку задачи, т.е. все условия и требования вместе. В задаче обычно присутствует не одно условие, а несколько независимых элементарных (т.е. нерасчленимых далее) условий. Требований в задаче также может быть не одно.

Задача. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см. и 12 см. Найти катеты треугольника.

В этой задаче можно выделить такие элементарные условия:

1) треугольник, о котором идет речь в задаче, прямоугольный;

2) в этот треугольник вписана окружность;

3) точка касания окружности с гипотенузой делит ее на два отрезка;

4) длина одного из этих отрезков равна 5 см.;

5) длина другого отрезка равна 12 см.

Требование этой задачи можно расчленить на два элементарных:

1) найти длину одного катета треугольника;

2) найти длину другого катета треугольника.

Понятие «решение задачи» используется в нескольких основных смыслах:

- решение задачи как план (способ, метод) осуществления требований задачи;

- решение задачи как процесс выполнения плана, реализации требования;

- решение задачи как результат выполнения плана решения.

2.2 Роль и функции геометрических задач

Роль и функции задач в обучении геометрии в основной школе во многом определяются целью изучения курса геометрии в VII-IX классах, которая сформулирована а программах по математике следующим образом: «Целью изучения курса геометрии в VII-IX классах является систематическое изучение свойств геометрических фигур на плоскости, формирование пространственных представлений, развитие логического мышления и подготовка аппарата, необходимого для изучения смежных дисциплин (физика, черчение и т.д.) и курса стереометрии в старших классах» [8 с. 8].

В качестве обучающей цели курса геометрии VII-IX классов в программах по математике является систематическое изучение свойств геометрических фигур на плоскости; в качестве развивающей цели - формирование пространственных представлений и развитие логического мышления; пропедевтическая цель состоит в подготовке аппарата, необходимого для изучения смежных дисциплин и стереометрии. Геометрические задачи эффективно способствуют достижению всех сформулированных в программе целей курса геометрии VII-IX классов.

Систематическое решение задач способствует сознательному и прочному усвоению теории геометрии, помогает увидеть ее практическую ценность, формирует ключевые компетенции в области геометрии.

Геометрические задачи, как и другие математические задачи, выполняют воспитательные, развивающие и обучающие функции.

Осуществляя подбор задач для урока, учитель может преследовать различные цели, используя различные функции той или иной задачи на различных этапах урока.

Задача может предварять какое-либо теоретическое положение и помогает отыскать его или усмотреть некоторую геометрическую зависимость. Тогда в задачи включают отдельные элементы доказательства теоремы. Рассмотрим пример.

Пример. Перед доказательством признака равенства треугольников по трем сторонам можно предложить следующие задачи:

а) Дано: $AB = BC;\ AD = CD$

Доказать: $\Delta BAD = \Delta BCD$

б) Дано: в четырехугольнике ABCD:

$AB = AD;\ BC = CD$

Доказать: $\Delta ABC = \Delta ADC$

Решение задачи может служить источником получения новых знаний по геометрии. Тогда полезно к условию задачи сформулировать некоторую последовательность заданий-требований.

Задача. Через точку М внутри круга проведены две хорды AB и CD. Доказать, что треугольники AMC и DMB подобны

Последовательность заданий-требований может быть такая:

- Записать пропорциональность сходственных сторон.
- Сравнить произведение отрезков хорды CD, на которые их делит точка М.
- Провести диаметр через точку М и сравнить произведение отрезков диаметра с произведениями отрезков каждой из хорд, проходящих через точку М.
- Сформулировать полученное предложение.

Задача по геометрии может выполнять роль демонстрации практической значимости геометрии.

Задача. Длина тени, отбрасываемой деревом, равна 8,7 м, в то время как длина тени палки, воткнутой вертикально в землю, равна 1,2 м. Определить высоту дерева, если длина палки равна 0,88 м.

2.3 Классификации геометрических задач

В методической литературе приняты следующие условные классификации геометрических задач.

1. По специфике языка. В курсе геометрии основной школы часто решаются текстовые задачи, т.е. те задачи, условие которых представлено преимущественно на естественном языке. Примером такого рода задачи из задач, рассмотренных в предыдущем пункте, может служить задача о хордах круга. Как видно из этого примера, кроме естественного здесь может использоваться и геометрический язык.

Иногда решаются и сюжетные геометрические задачи, то есть те, в которых присутствует фабула.

В них описан «некоторый жизненный сюжет (явление, событие, процесс) …» [2 с. 3]. Чаще всего это геометрические задачи с практическим содержанием.

Сюжетные геометрические задачи играют значительную роль в процессе обучения, т.к. при их решении решается одна из важнейших задач всего курса математики - обучение методу моделирования и, в первую очередь, перевод естественного языка на язык математический, что иногда представляет значительную трудность.

Абстрактные задачи (с использованием только геометрического языка) встречаются гораздо реже. Иллюстрацией такого рода задач могут служить две задачи на готовых чертежах в первом из рассмотренных в предыдущем пункте примере.

2. По характеру рассматриваемых в геометрической задаче объектов они подразделяются на чисто геометрические задачи и практические задачи.

В чисто геометрических задачах речь идет только о геометрических фигурах вне связи их с конкретными объектами окружающего мира. Именно такие задачи составляют основное содержание задачного материала современных учебников геометрии.

В практических задачах основными объектами являются предметы окружающего мира. Эти задачи помогают учащимся узнавать в предметах окружающего мира знакомые геометрические фигуры, использовать те или иные свойства этих фигур и тем самым осознавать возможности практического применения геометрии.

Практические задачи играют большую роль в формировании общих компетенций. Задач с практическим содержанием в учебниках обычно недостаточно.

3. Геометрические задачи, для решения которых в школьном курсе имеются готовые алгоритмы или эти алгоритмы непосредственно следуют из определений или теорем, называют стандартными.

Стандартными являются геометрические задачи, в которых теоремы могут служить алгоритмами решения. Так, теорема о средней линии трапеции служит алгоритмом для решения задач нахождения длины средней линии трапеции по ее основаниям. Последовательность шагов алгоритма для решения таких задач проста:

1) устанавливаем длину оснований трапеции;

2) находим их полусумму. Это и будет длина средней линии.

Все так называемые элементарные задачи на построение являются стандартными.

4. Наиболее распространенная классификация, которая обычно используется и в работе с учащимися, - это классификация, основанием которой является характер требований задачи.

В соответствии с этим основанием геометрические задачи условно классифицируются на задачи: 1) на вычисление, 2) на доказательство, 3) на построение (конструктивные задачи).

Эта классификация, несмотря на очень широкое ее распространение, достаточно условна: задача на вычисление часто является и задачей на доказательство, так как требует обоснования; одним из очень существенных этапов решения задачи на построение является доказательство; во многих

задачах сочетается построение, вычисления и измерение. Все же эта классификация облегчает рассмотрение особенностей каждого вида геометрических задач.

В методической литературе специально выделяются так называемые “задачи на готовых чертежах”. Далее мы кратко их охарактеризуем. Функции этих задач не столько математические, сколько методические.

Методический характер носит и классификация, основой которой является характер использования задачи на уроке. В соответствии с этой классификацией можно выделить:

- подготовительные задачи,
- задачи на раскрытие содержания новых понятий,
- задачи на применение отдельной теоремы, формулы и др.;
- комбинированные задачи: на применение нескольких теорем, формул.

Рассмотрим методику использования в процессе обучения наиболее интересных с методической точки зрения классов геометрических задач.

Методические особенности обучения решению геометрических задач

Чертеж и краткая запись условия геометрической задачи

Основная особенность геометрических задач состоит в том, что их решение практически всегда сопровождается на том или ином этапе (иногда на нескольких) построением схематического чертежа-наброска, или, в некоторых случаях, полноценного чертежа. Правильное выполнение простейшего чертежа, как и его чтение, - одни из важнейших компетенций, необходимых каждому человеку в его повседневной, а во многих случаях и профессиональной деятельности.

С методической точки зрения чертеж - важнейшее средство наглядности, значение которого для обучения геометрии трудно переоценить. Особенно значительную роль играют чертежи в курсе геометрии основной школы, так как они, в отличие от старших классов, достаточно легко выполнимы и отражают истинное положение фигуры на плоскости.

При построении чертежа следует выполнять ряд требований. Сформулируем основные из них.

1. Чертеж должен представлять собой схематический рисунок основного объекта задачи (геометрической фигуры, или совокупности фигур, или какой-то части этих фигур).

2. Все элементы фигуры и некоторые ее характеристики должны быть обозначены на чертеже с помощью букв и других знаков.

Если в тексте задачи указаны какие-либо обозначения фигуры или ее элементов, то эти обозначения должны быть и на чертеже; если же в тексте никаких обозначений нет, то следует воспользоваться общепринятыми или наиболее удобными в данном конкретном случае.

3. Чертеж к геометрической задаче должен отражать наиболее общий случай вида и расположения основного ее объекта.

Это означает, что если в задаче в качестве основного объекта назван, например, треугольник и при этом не указан его вид, то следует построить разносторонний непрямоугольный треугольник. Или если в задаче основным объектом является трапеция, то не следует строить равнобедренную или прямоугольную трапецию и т.д.

4. При выполнении чертежа желательно соблюдать заданные в условии пропорции в построении отдельных элементов фигуры.

Это не значит, что необходимо строго выдерживать масштаб. Однако, если по условию задачи сторона AB треугольника ABC наибольшая, то это должно быть соблюдено на чертеже. Или если задана медиана треугольника, то она должна проходить через одну из вершин и приблизительно через середину противоположной стороны. Надо соблюдать также такие заданные в условии задачи отношения, как параллельность, перпендикулярность и т.п.

5. Чертеж существенно облегчит процесс решения задачи, если он верен, легко выполним, нагляден.

Построение чертежа, как правило, сопровождает краткая запись всех условий и требований геометрической задачи. В ней, пользуясь принятыми на

чертеже обозначениями, записываются все характеристики и отношения, указанные в условии задачи.

При этом названия фигур или отдельных ее частей следует заменять схематической записью их определений. Так, вместо того, чтобы писать, что ABCD - трапеция, лучше записать, что AB ∥ CD.

В краткой записи, так, где это возможно и целесообразно, следует использовать стандартный математический символический язык, т.е. знаки =, ∥

Задача. Диагональ трапеции перпендикулярна к ее основаниям; тупой угол, прилежащий к ее основанию, равен 120°, а боковая сторона, прилежащая к нему, равна 7 см; большее основание равно 12 см. Найти среднюю линию трапеции.

Основной объект задачи - трапеция, в которой одна из диагоналей перпендикулярна ее основаниям.

Наиболее оптимальный путь - построение этой диагонали, которую можно представить в качестве вертикального отрезка, от концов которого строятся два горизонтальных отрезка, - основания трапеции, направленные в разные стороны от диагонали. Строим тупой (по условию) угол при большем (обычно нижнем) основании. Вторая его сторона пересечет меньшее основание в одной из вершин трапеции. Достраиваем трапецию, придерживаясь заданных пропорций, проводим в ней среднюю линию, вводим стандартные обозначения тупого угла при большем основании.

2.4 Методика обучения решению стандартных геометрических задач

Стандартные геометрические задачи - это такие задачи, которые решаются с помощью одной теоремы, одного определения геометрического понятия и т.п. Тем не менее, не всегда процесс решения такой задачи проходит гладко. Дело в том, что в конкретной теореме, определении конкретной геометрической фигуры алгоритм применения их к определенной стандартной геометрической задаче находится в свернутом виде. Для того, чтобы его использовать, следует развернуть этот алгоритм в пошаговую программу действий. К тому же

стандартные задачи являются основными геометрическими задачами, поскольку все остальные в конечном счете сводятся к ним.

Можно выделить следующие особенности процесса решения стандартных геометрических задач.

1. Анализ стандартной геометрической задачи сводится к распознаванию вида задач, к которому принадлежит данная задача, т.е. того общего положения геометрии (аксиомы, теоремы, определения геометрической фигуры), с помощью которого она решается.

Это диктует необходимость для обучаемого держать в оперативной памяти все изученные в геометрии общие положения - аксиомы, теоремы, определения геометрических фигур

2. Поиск решения стандартной геометрической задачи состоит в составлении на основе общего положения геометрии последовательности шагов решения задач данного вида, то есть в разворачивании свернутой в общем положении программы деятельности. Ее не обязательно формулировать письменно, достаточно просто наметить.

3. Решение стандартной геометрической задачи состоит в применении этой программы к условиям данной задачи.

4. При этом какой-то шаг программы может быть ранее решенной стандартной задачей. Таким образом, процесс накопления стандартных задач во многом индивидуален.

Пример. Для решения элементарной задачи на построение треугольника по трем элементам (сторонам и углам), каждая из которых является стандартной, используются такие ранее решенные элементарные стандартные задачи, как построение угла и отрезка, равных заданным.

2.5 Метод дополнительных построений (конструктивный)

Суть метода дополнительных построений заключается в том, что чертеж к задаче дополняется новыми (вспомогательными) элементами, после чего эти связи становятся очевидными.

Существуют задачи, в которых дополнительное построение определяет единственный способ решения.

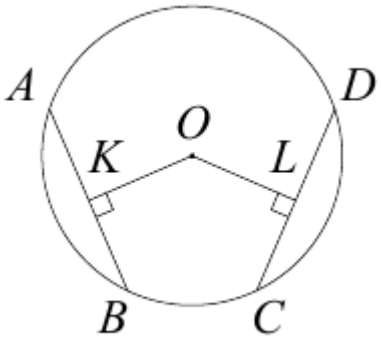
В других задачах используется смешанный прием решения, когда дополнительное построение реализует лишь часть решения.

В третьих задачах оно применяется как один из возможных методов наряду с другими. Во многих случаях применение дополнительного построения делает решение задачи устным.

Пример задачи, представленной в ГИА, которая решается с помощью дополнительного построения:

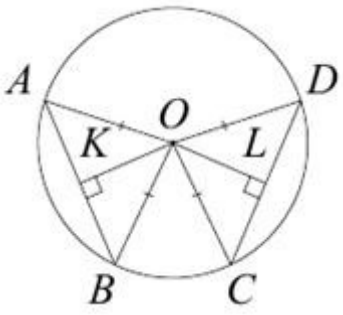
Задача

В окружности с центром O проведены две равные хорды AB и CD. На эти хорды опущены перпендикуляры OK и OL соответственно.
Докажите, что OK и OL равны.



Решение:

Проведём радиусы OA, OB, OC, OD. Треугольники AOB и COD равны по трём сторонам. OK и OL -- их высоты, проведённые к равным сторонам, следовательно, они равны как соответственные элементы равных треугольников.



Классификация дополнительных построений, связанная с характерными признаками фигуры, данной в задаче.

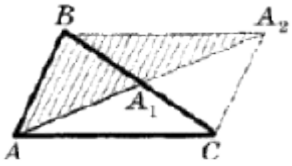


Рис. 1

Дополнительное построение 1

Если в треугольнике задана медиана, то треугольник достраивается до параллелограмма с центром в основании этой медианы (рис.1).

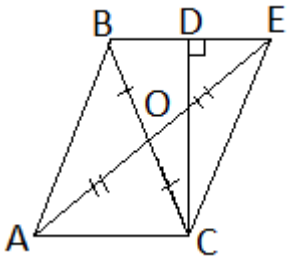
В зависимости от содержания задачи такое достраивание можно выполнять для одной, двух или даже трех медиан. При этом возможно использование не всего параллелограмма, а лишь его части (например, треугольника $AB\,A_2$).

Задача

Две стороны треугольника равны 27 и 29, а медиана, проведенная к третьей стороне равна 26. Найти высоту, проведенную к стороне 27.

Дано:

ΔABC, AB=27,BC=29,BO=26 CD – высота, BO- медиана



Найти CD.

Решение:

1. Дополнительное построение: строим OE=BO, ABCE- параллелограмм (по признаку) BC=AE=29, AB=EC=27

2. $S_{\Delta ABC}= S_{\Delta ABE}$

3. $S_{\Delta ABE}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (по формуле Герона)=270

$S_{\Delta ABE}= \frac{1}{2}\cdot 27\cdot CD$

$270 = \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot CD$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, $CD = 20$

Ответ: 20

Дополнительное построение 2

Если дана трапеция, то ее диагональ или боковая сторона параллельно переносятся (рис.2).

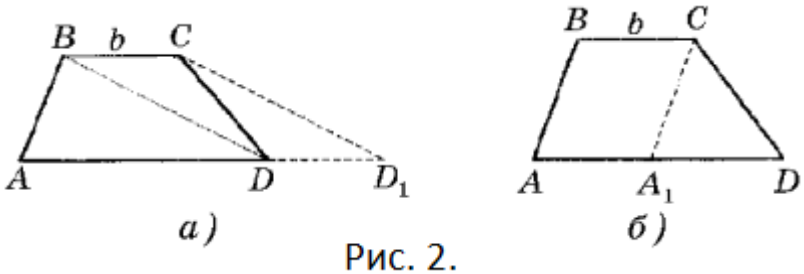
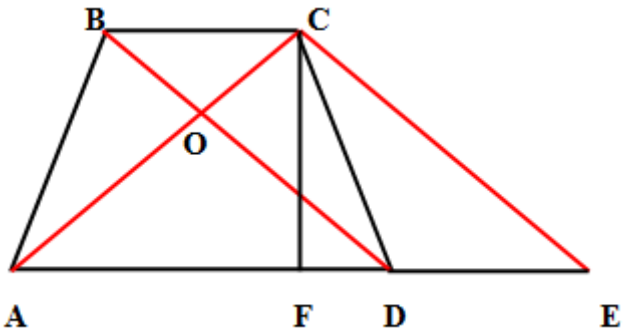


Рис. 2.

Задача

Найти высоту равнобедренной трапеции, если её диагонали взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна S.



Дано:

ABCD - равнобедренная трапеция

AC и BD – диагонали ACBD

S - площадь трапеции

Найти: h - высоту трапеции

Решение:

1. Дополнительное построение: строим $CE || BD$

2. равнобедренный (т. к $AC = BD$, $BD = CE$, $AC = CE$)

3. прямоугольный (т. к $COBD$, $BD || CE$)

4. Проводим высоту CF - она является медианой и биссектрисой

$AE = 2\,AF = 2\,h$

$Smp = \frac{1}{2}(BC + AD)\cdot CF$

$BC + AD = AE$ (т.к $BCED$- параллелограмм) $BC = DE$

$\frac{1}{2}AE \cdot CF = \frac{1}{2}\cdot 2h \cdot h = h^2$

$Smp. = h^2$

Ответ: h^2

Задача

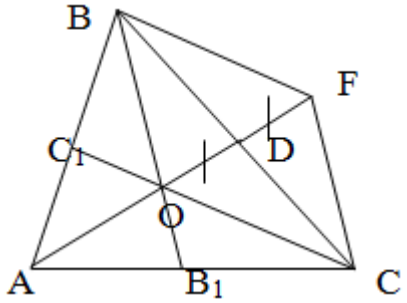
Длина треугольника выражается формулой

$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b{}^2 + m_c{}^2) - m_a{}^2}$; где $m_{a,}\, m_b, m_c$- длины медиан треугольника. Докажите.

Доказательство

Отметим на медиане AD точку O пересечения медиан треугольника; согласно свойству (три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника), она делит AD в отношении $AO:OD = 2:1$

Продолжим OD на расстояние DF=OD=1/3m_a и соединим точку F с B и C Теперь составим уравнение, связывающее длины сторон BO=2/3m_b, CO=2/3m_c и диагоналей OF=2/3m_a, $BC = a$ параллелограмма $OBFC$



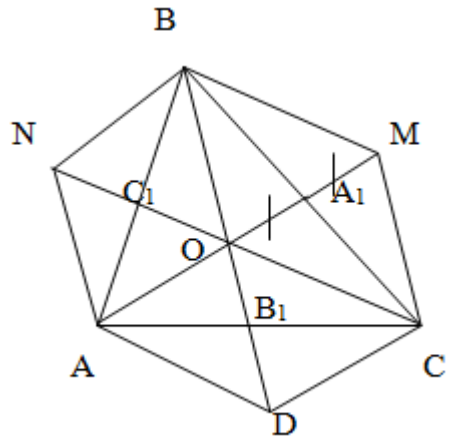
$(2/3\,m_a)^2 + a^2 = 2((2/3\,m_b)^2 + (2/3\,m_c)^2)$

$a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b{}^2 + m_c{}^2\right) - m_a{}^2}$

что и требовалось доказать.

Дополнительное построение 3

Если в задаче дана длина всех трёх медиан, то для того чтобы найти площадь треугольника, продолжают все медианы на 1/3 её длины и достраивают до параллелограмма.

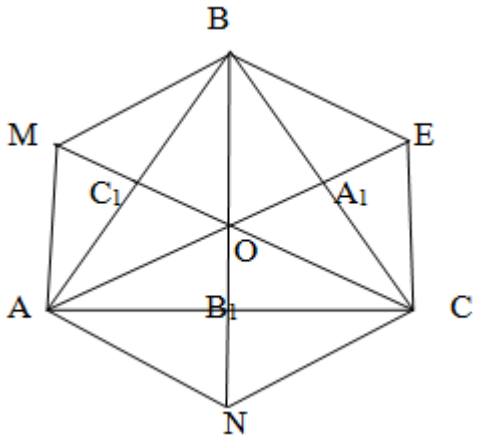


Задача

Медианы треугольника ABC AA_1=3см, BB_1=4см, CC_1=5 см.

Найти площадь треугольника ABC

Решение



Продолжим медианы $A A_1$, BB_1, и CC_1 на длину отрезков A_1E, B_1N, C_1M равные по длине OA_1, OB_1, OC_1 соответственно получим шесть равновеликих треугольников MBO, MOA, AON, NOC, COE, OEB стороны которых равны 2/3 длины медиан.

$$S_{OBE}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,\frac{2}{3}$$

$$BO=m_b;\ OE=A A_1;\ BE=m_c$$

$$S_{BOC}=S_{BOA_1}+S_{COA1}=S_{BOA_1}+S_{BA_1E}=S_{BOE}$$

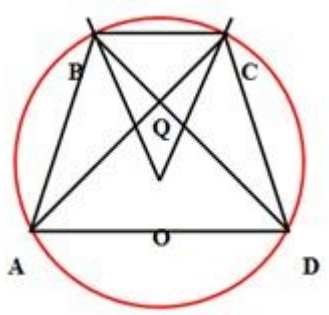
$S_{ABC}=3S_{BOE}=3\cdot\frac{8}{3}$

$S_{ABC}=8$см

Ответ 8 см

Дополнительное построение 4

Если дан четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны, то в него вписывается окружность.



Задача

В трапеции $ABCD$ (AB и CD основания) меньшее основание равно a, углы, прилежащие к этому основанию, равны, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

Дано:

ABCD - трапеция

AB и CD - основания

Найти S трапеции

Решение:

1. Дополнительное построение: строим описанную окружность (т.к трапеция равнобедренная, то можно описать окружность)

2. S тр.=$\frac{1}{2}AC\cdot BD$

3. Пусть $QB=x$, $AB=2x$, $AQ=y$

4.По теореме Пифагора:

$$\Rightarrow \frac{BQ}{AQ}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow AD=\sqrt{3}a$$

5. $BQ=QC=x$

По теореме Пифагора из BQC:

$x + x = a$

$$\Rightarrow a^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow BQ = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

6. $AQ = QD = y$

По теореме Пифагора из AQD:

$$y^2 + y^2 = 3a^2 \Rightarrow 2y^2 = 3a^2 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}} \Rightarrow QD = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}}$$

7. $BD = BQ + QD =$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}} = \frac{a(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

8. S=

$$\frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} BD^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2(1+\sqrt{3})^2}{2} = \frac{a^2(1+3+2\sqrt{3})}{4} = \frac{a^2(4+2\sqrt{3})}{4} = \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$$

$$\frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$$

Ответ: [8]

2.6 Аналитические методы

Один из основных аналитических методов решения планиметрических задач является векторный метод.

Примерная схема решения геометрических задач векторным методом:

- Прочитать задачу, выделить условие и требование задачи, выполнить чертёж.

- Ввести в рассмотрение векторы (выбрать базис - два неколлинеарных вектора на плоскости, три некомпланарных вектора в пространстве).

- Перевести геометрическое условие задачи на язык векторов.

Векторы, необходимые для решения, выразить через базисные.

- Перевести геометрическое требование задачи на язык векторов (можно устно).

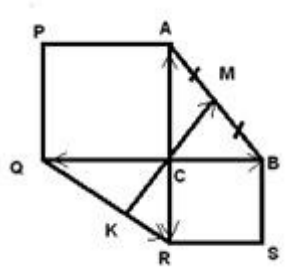
- С помощью векторной алгебры (преобразований векторных выражений) перейти от векторного условия задачи к требованию.

-Полученному векторному выражению дать геометрическое истолкование.

Пример одного из заданий, основанного на данном методе:

Задача

На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C построены квадраты $ACQP$ и $BCRS$. Точка M середина гипотенузы AB. Доказать, что отрезки CM и QR перпендикулярны.



К аналитическому методу относиться метод координат.

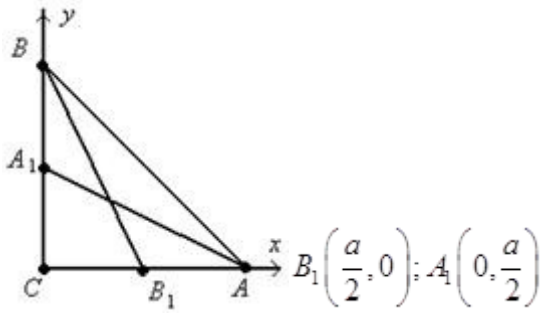
Примерная схема решения геометрических задач методом координат:

- Прочитать задачу, выделить условие и требование задачи, выполнить чертёж.
- Выбрать систему координат (наиболее рациональным способом).
- Записать координаты точек, необходимых для решения. «Перевести» геометрическое условие задачи на язык координат.
- Перевести геометрическое требование задачи на язык координат (можно устно).
- С помощью алгебраических преобразований перейти от условия задачи к требованию.
- Полученному алгебраическому выражению дать геометрическое истолкование.

Пример одного из решений, основанного на данном методе:

Задача

В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы острых углов. Вычислите косинус угла между ними.



Решение:

1. Введем систему координат так, в этом случае вершины треугольника будут иметь координаты: C(0,0), A(a,0), B(0,a), а середины катетов: .

(Здесь a - длина катета.)

$$\overrightarrow{BB_1}=\left(\frac{a}{2}-0;0-a\right)=\left(\frac{a}{2};-a\right)$$

2. Вычислим координаты векторов и .

$$\overrightarrow{AA_1}=\left(0-a;\frac{a}{2}-0\right)=\left(-a;\frac{a}{2}\right)$$

3. Теперь используем формулу для вычисления косинуса угла между векторами. (Этот угол совпадает с углом между медианами.)

$$\cos\left(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BB_1}\right)=\frac{(-a)\cdot\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cdot(-a)}{\sqrt{(-a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+(-a)^2}}=-\frac{4}{5}$$

Ответ: .$\frac{-4}{5}$

Данные методы решения планиметрических задач помогут учащимся наиболее продуктивно подготовится к решению модуля «Геометрия».

Ученик должен ознакомиться с определенным набором достаточно трудных геометрических задач, научиться решать задачи, следуя известным образцам.

В геометрии, в отличие от алгебры, алгоритмов очень мало, почти нет. Поэтому при обучении возрастает значение опорных задач.

2.7 Вспомогательные задачи

А) Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Б) Где лежит центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, и чему равен ее радиус?

В) Выразить радиус вписанной окружности через гипотенузу и катеты прямоугольного треугольника.

Г) Выразить высоту, проведенную к гипотенузе, через гипотенузу и катеты.

Применение вспомогательных задач

1. Доказать, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник – прямоугольный.

2. В треугольнике АВС из вершин А и В проведены высоты, О – середина стороны АВ. Доказать, что отрезки, соединяющее основания высот с точкой О, равны.

3. В параллелограмме из вершины тупого угла проведены высоты, О – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Доказать, что отрезки, соединяющие точку О с основаниями высот, равны.

4. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиуса r. Найти сторону ромба.

5. Вот треугольник непростой:

В нем угол АВС – прямой.

А теперь – условий узы:

с – длина гипотенузы,

r – величина не меньшей нужности –

Радиус вписанной окружности.

Задача, посильная для школьника –

Найти площадь треугольника!

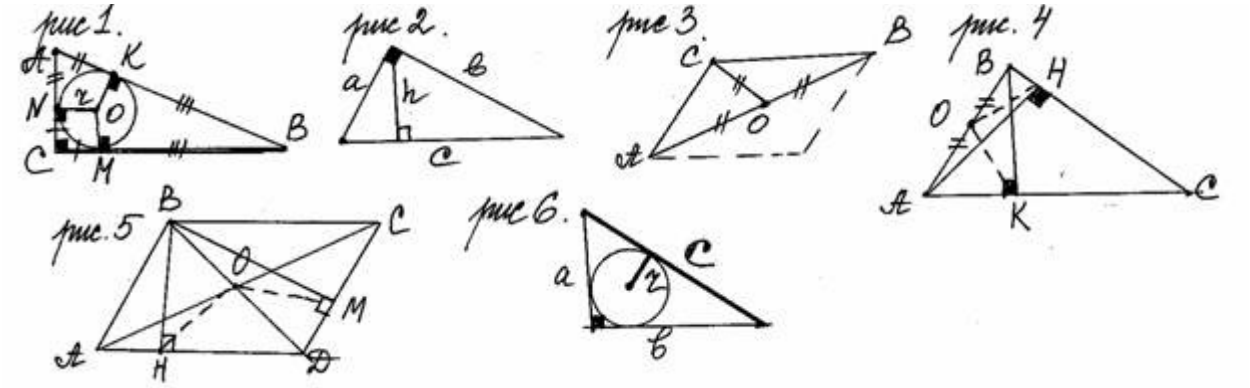
Решение

Задача А:

Дополняем треугольник до прямоугольника и используем свойство его диагоналей. Задача В является следствием задачи А, в ней используется определение окружности и определение окружности, описанной около треугольника.

Задача В (рис. 1)

По свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки,



$AK = AN,\ BK = BM,\ CM = CN.$

Четырехугольник $CMON$ – квадрат, сторона которого равна r.

$AN = b - r = AK,\ BM = a - r = BK,\quad AB = AK + KB = b - r + a - r = c,$ от

$$r = (a + b - c)/2.$$

Задача Г.

Площадь прямоугольного треугольника можно найти двумя способами: $S = ab/2 = ch/2,$ *отсюда* $h = ab/c$ (рис.2).

При решении задачи №1 следует обратиться к задаче А (это обратные задачи). Достроим треугольник АВС до параллелограмма (рис.3).

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, но в нашей задаче половинки АО = ВО = СО, тогда АВ = CD, а это признак прямоугольника, поэтому угол АСВ равен 90^0.

Задача (рис. 4)

Доказать, что ОК = ОН.

По условию О – середина АВ, значит ищи медиану или медианы.

OK – медиана в треугольнике ABK, OH – медиана в треугольнике ABH, поэтому

$$OK = AB/2 \ и \ OH = AB/2.$$

Задача (рис. 5).

Доказать, что ОН = ОМ.

Найдите прямую связь этой задачи с задачей №2.

Задача

Ищем ответы на вопросы:

1) где лежит центр вписанной окружности?

2) Почему в ромб можно вписать окружность?

3) Где провести радиус?

4) Каковы свойства диагоналей ромба?

Решение:

Гипотенуза прямоугольного треугольника x (сторона ромба), катеты $\frac{x}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}x$,

высота, проведенная к гипотенузе – r ; $r = (\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - x)/2$;

Ответ: $x = \frac{4r}{\sqrt{3}-1}$.

Задача (рис. 6).

При решении этой задачи надо вспомнить все, связанное с площадью треугольника, радиусом вписанной окружности и гипотенузой.

Итак, вспоминаем:

$$S = ab/2 \Rightarrow 2S = ab; \quad r = (a + b - c)/2 \Rightarrow 2r + c = a + b;$$

необходимо как-то связать произведение чисел ab и их сумму $a + b$.

Вспомним формулы сокращенного умножения: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$;

$$(2r + c)^2 = c^2 + 2ab; \ 2ab = 4r^2 + 4rc + c^2 - c^2;$$

$$ab = 2r^2 + 2rc; \ ab/2 = r^2 + rc = S.$$

Ответ: $S = r^2 + rc$.

2.8 Проблемные методы решения стереометрических задач

Проблемные методы решения стереометрических задач – это продуктивные методы, направленные на развитие у обучающихся, прежде всего, метапредметных компетенций.

Если при репродуктивных методах обучения обучающиеся получают мало стимулов для осуществления учебной деятельности, то при продуктивных методах поле таких стимулов значительно расширяется. При традиционных подходах к обучению учитель создает искусственную образовательную среду, которая является очень неустойчивой. Действительно, в такой среде активность обучающихся во многом обусловлена исключительно внешней мотивацией («ты должен знать, потому что от тебя это требуется», «ты должна уметь, чтобы получить хорошую отметку», «не будешь учить – не сдашь экзамен» и т.д.). Вынужденная активность, не развивая познавательный интерес, быстро сходит на нет, как только обучающийся выходит из искусственно созданной образовательной среды. Нередко облучающиеся забывают, что они проходили на уроке уже со звонком на перемену. Поэтому учителя, использующие репродуктивные методы обучения и считающие, что школьники у них на уроке работают активно, – заблуждаются. Это – мнимая активность, не приводящая к устойчивой системе знаний, умений и навыков.

Репродуктивные методы обучения тоже предполагают некоторую самостоятельность в учебном процессе, но эта самостоятельность ограничивается лишь этапами закрепления и контроля. На этапах актуализации и формирования новых знаний, умений и навыков обучающиеся следует исключительно инструкциям учителя, а всякая самостоятельность рассматривается нередко как нежелательная самодеятельность и пресекается.

Репродуктивные методы не способствуют вовлеченности обучающихся в учебный процесс или, если и способствуют, то только на основе внешней мотивации (вынуждения, принуждения, приказов, уговоров и пр.). Такая вовлеченность неустойчивая и непродуктивная. Истинная вовлеченность обучающегося в процесс познания наблюдается тогда, когда обучающийся

приходит к этим знаниям самостоятельно. Проблемные методы, в отличие от репродуктивных, опираются на познавательную активность обучающихся.

Развитие обучающихся с помощью проблемных методов осуществления целостного образовательного процесса происходит по всем аспектам: познавательным, речевым, интеллектуальным. Продуктивность проблемных методов обучения оценивается именно по тому, сколько аспектов развития охватывают данные методы на данном этапе решения образовательных задач.

Проблемные методы обучения – это активные способы формирования знаний, умений, навыков. Обучающиеся включаются в учебно-познавательную деятельность очень активно, с желанием достичь нужных результатов. При этом нацеленность на результат носит не внешнюю, а внутреннюю обусловленность. Обучающийся желает добыть знания, потому что ему это интересно, а не потому, что это надо учителю, родителям. Именно поэтому проблемные методы обучения целесообразно применять на всех этапах образовательного процесса.

Также проблемные методы обучения предполагают постепенный отказ от репродуктивных методов, доказавших малую эффективность в процессах формирования необходимых компетенций. Если продуктивность метода связана с поиском новых знаний, то учебная задача оформляется в виде проблемы, которую необходимо разрешить. Однако велика роль проблемных методов на стадии закрепления материала. Продуктивное закрепление знаний, умения или навыка – это процесс, связанный с усилением регулятивных компетенций обучающихся (навыков самоконтроля, самооценки и т.д.).

Среди проблемных методов решения стереометрических задач следует выделить: диалоговый, эвристический и поисковый.

Диалогический метод – это обусловленная принципами обучения система регулятивных правил подготовки учебного материала и проведения сообщающей беседы с целью объяснения учебного материала учителем, усвоения его учащимися; побуждения учащихся к участию в постановке проблем и их решении; активизации их учебной деятельности. Работа диалогическим методом осуществляется в форме беседы на уроках первого и третьего типа

(изучения нового материала; обобщения и систематизации знаний). В беседе преподаватель привлекает учащихся к ответам на такие вопросы, которые обращены к имеющимся у них знаниям и умениям. Доля их самостоятельности в учебной деятельности определяется количеством вопросов репродуктивного характера. При постановке вопросов, требующих для ответа новой информации, новых знаний, новых подходов, преподаватель либо сам отвечает на них, либо организует изучение учащимися учебного пособия, видеофильма и пр. Этот метод очень динамичен, он может перейти и в эвристический, и при необходимости в монологический, может применяться практически на любом этапе урока.

Эвристический метод – это обусловленная принципами обучения система регулятивных правил подготовки учебного материала и проведения эвристической беседы с решением познавательных задач. Применяется эвристический метод при изучении нового материала, имеющего противоречивый характер, или при совершенствовании ранее усвоенных знаний с целью обобщения полученных ранее впечатлений, стимулирования многоаспектного осмысления явлений, самостоятельного поиска учащимися новых способов деятельности, которым их ранее не обучали. В большой степени применение этого метода зависит от уровня обученности и развития учащихся, особенно от сформированности их познавательных умений. Эвристический метод применяется в форме эвристической беседы во время семинара, дискуссии, учебной конференции. Учитель сочетает частичное объяснение нового с постановкой проблемных заданий. Учащиеся выполняют самостоятельные работы поискового типа: анализируют проблемные ситуации, ставят проблемы и решают их, находят новые знания и способы действий.

Поисковый метод – это обусловленная принципами обучения система регулятивных правил подготовки учебного материала и организации преподавателем самостоятельной работы учащихся по решению проблемных заданий с целью усвоения ими новых понятий и способов действий и развития у них интеллектуальной и других сфер. Поисковый метод (как более сложный)

применяется реже эвристического на доступном учащимся материале, изучение которого чаще связано с выполнением практических или теоретических работ поискового характера.

2.9 Разработка урока по решению стереометрических задач

В рамках данного исследования разработан урок в 11 классе по теме «Решение стереометрических задач по прямому круглому конусу».

Цель урока – формирование знаний о конусе в процессе решения стереометрических задач.

Задачи урока:

1) обучающие – формирование предметных компетенций, а именно:

– формирование знаний о конусе как о фигуре вращения, о его развертке;

– формирование знаний об основных конструктивных элементах конуса;

– формирование умения находить площадь полной поверхности прямого круглого конуса;

2) воспитательные: формирование личностных универсальных действий;

3) развивающие – формирование метапредметных компетенций (познавательных, регулятивных и коммуникативных).

Форма организации работы на уроке: индивидуальная, парная.

Содержание урока – решение стереометрических задач.

Методы: проблемные (диалогические и поисковые).

Средства: учебник, компьютер, интерактивная доска.

Конспект урока.

1. Организационный этап. На организационном этапе учитель устанавливает атмосферу урока, готовит обучающихся к восприятию нового материала.

2. Актуализирующий этап. На экране изображен прямой круглый конус (рис. 1).

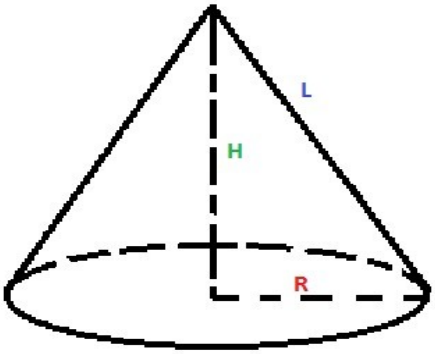


Рисунок 1 – Актуализирующий рисунок к уроку

Учитель предлагает проблемную ситуацию.

Проблемная ситуация: нужно понять, что является разверткой прямого круглого конуса. Обучающимся предлагается воспользоваться листом бумаги формата А4, из которого вырезан треугольник. Работа осуществляется в парах. Работая с листом, обучающиеся приходят к выводу о том, что треугольник конструктивно не может быть разверткой конуса, а также к выводу о том, что разверткой конуса служит сектор (рис. 2).

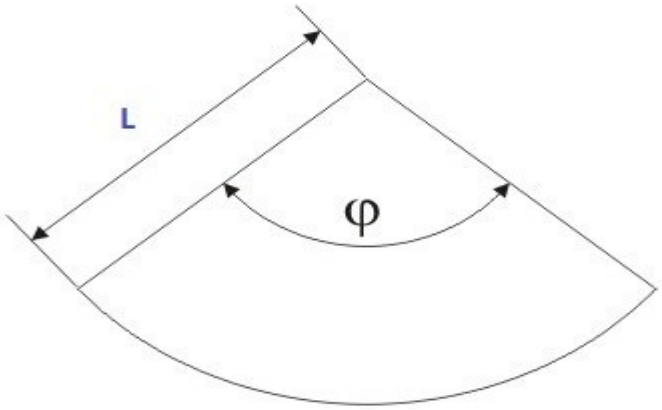


Рисунок 2 – Рисунок, полученный обучающимися в ходе разрешения проблемной ситуации

3. Основной этап.

3.1. Обучающиеся знакомятся с конструктивными элементами конуса: боковой поверхностью, основанием и его радиусом (R), образующей (L), высотой (H).

3.2. Решение задач.

3.2.1. Проблемная задача о нахождении образующей прямого круглого конуса.

Высота прямого круглого конуса равна H, радиус основания прямого круглого конуса равен R. Найти образующую L прямого круглого конуса.

Обучающиеся записывают условие и вопрос задачи.

Речь учителя: что нужно рассмотреть для решения данной задачи?

Ответы обучающихся: прямоугольный треугольник, образованный высотой, радиусом основания и образующей.

Обучающиеся делают рисунок (рис. 3).

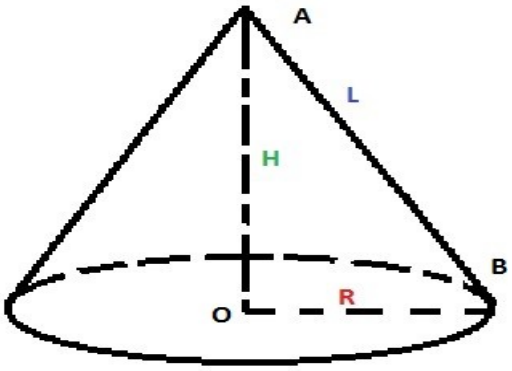


Рисунок 3 – Рисунок к задаче 3.2.1

Речь учителя: какой теоремой воспользуемся?

Ответы обучающихся: теоремой Пифагора.

Решая задачу, обучающиеся самостоятельно приходят к выводу о том, что образующая прямого круглого конуса $L = \sqrt{H^2 + R^2}$.

3.2.2. Проблемная задача о нахождении площади полной поверхности прямого круглого конуса.

Высота прямого круглого конуса равна H, радиус основания прямого круглого конуса равен R, образующая прямого круглого конуса равна L. Найти площадь полной поверхности $S_{пп}$ прямого круглого конуса.

Обучающиеся записывают условие и вопрос задачи.

Речь учителя: из чего будет складываться площадь полной поверхности прямого круглого конуса?

Ответы обучающихся: из площади боковой поверхности и площади основания.

Речь учителя: что нужно знать для вычисления площади боковой поверхности?

Ответы обучающихся: длину окружности основания.

Обучающиеся делают рисунок (рис. 4).

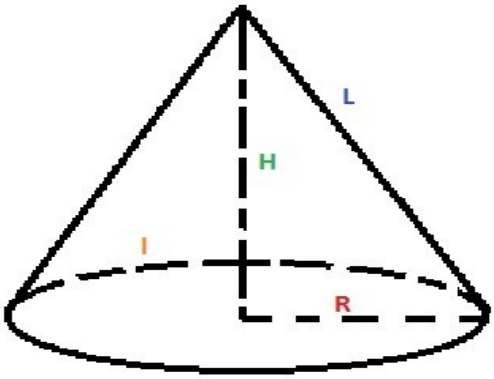


Рисунок 4 – Рисунок к задаче 3.2.2

Работая в парах, обучающиеся находят, что площадь боковой поверхности прямого круглого конуса $S_{бп} = \frac{L \cdot l}{2} = \frac{L \cdot 2\pi R}{2} = \pi RL$.

Речь учителя: что представляет собой площадь основания прямого круглого конуса?

Ответы обучающихся: это площадь круга радиуса R.

Работая в парах, обучающиеся находят, что площадь полной поверхности прямого круглого конуса $S_{пп} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R)$.

В конечном результате обучающиеся записывают формулу площади полной поверхности прямого круглого конуса, которая связывает только высоту и радиус основания: $S_{пп} = \pi R(\sqrt{H^2 + R^2} + R)$.

4. Закрепляющий этап.

Учитель предлагает обучающимся несколько задач для самостоятельного решения.

А. Площадь полной поверхности прямого круглого конуса равна 100 $см^2$, а высота прямого круглого конуса вдвое больше радиуса его основания. Найти образующую прямого круглого конуса.

Б. Образующая прямого круглого конуса образует с его основанием угол, равный 60^0. Площадь основания прямого круглого конуса равна 40 $м^2$. Найти площадь боковой поверхности прямого круглого конуса.

В. Высота прямого круглого конуса втрое больше радиуса его основания. Найти отношение площади полной поверхности прямого круглого конуса к площади его боковой поверхности.

Выводы по второй главе

1. Методика решения планиметрических и стереометрических задач должна основываться на проблемно-развивающем подходе к обучению, когда обучающиеся не решают задачу по определенному алгоритму, а приходят самостоятельно к необходимым выводам, которые помогут им в успешном решении.

2. Проблемные методы решения задач должны быть поисковыми и диалогическими. Только сочетание этих методов позволит достичь главной цели урока. Кроме того, такое сочетание методов обеспечивает сформированность необходимых навыков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новая концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования предоставила учащимся широкие возможности самостоятельного выбора не только уровня, но и направления математической подготовки, поставив и перед теорией, и перед практикой обучения математике задачу создания системы курсов, позволяющих выстраивать индивидуальные образовательные траектории для учащихся

Чем богаче и разностороннее мир ребенка, тем большее количество таких первоначальных знаний он получает до начала обучения в школе. По наблюдениям многих учителей и специалистов-психологов при неверном обучении ранняя способность оперировать геометрическими образами и синтезировать геометрические знания может в дальнейшем не только не развиваться, но даже резко ослабевать.

Одной из главных задач преподавания геометрии является задача планомерного, систематического развития геометрического, образного

мышления, восприятие геометрии не только как школьного предмета, но и как феномена человеческой культуры.

В процессе решения задач по геометрии учитель может эффективно формировать элементы алгоритмической культуры школьников. Задачи развивают поисковые навыки решения практических проблем, приобщают к посильным самостоятельным исследованиям, что очень важно в формировании умений и навыков умственного труда.

Посредством задач, даже простейших из них, более глубоко осознаются теоретические сведения об основных геометрических фигурах, так как в процессе решения этих задач ученик создает наглядную модель изучаемых свойств и отношений и работает с этой моделью. Решение планиметрических задач развивает такие качества личности, как внимание, настойчивость и целеустремленность, инициативу, изобретательность, дисциплинированность, трудолюбие.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В исследовании проанализированы наиболее эффективные методы решения стереометрических задач в школьном курсе геометрии.

К таким методам относятся методы проблемно-развивающего обучения. При реализации таких методов учитель выступает в качестве наставника, под руководством которого осуществляется решение, он не дает готовых алгоритмов и формул.

Для обоснования эффективности проблемных методов решения стереометрических задач были выявлены проблемные методы решения таких задач, проанализированы различные подходы к методологии их решения. Стереометрические задачи решаются путем подключения целостного математического мышления, которое обязательно включает пространственные мыслительные процессы. Кроме того, решение стереометрических задач предполагает развитие мыслительной деятельности в целом. Поэтому актуален проблемно-развивающий подход.

При таком подходе к решению стереометрических задач обучающиеся самостоятельно выводят формулы, формируют рисунки к задаче, создают опоры. Учитель может задавать проблемные вопросы – и тогда проблемное обучение становится диалоговым. Однако не следует превращать весь урок по решению стереометрических задач в диалог; необходимо также использовать поисковые методы.

Список использованной литературы

1. Ананченко, К.О. Общая методика преподавания математики в школе / К.О. Ананченко. – Мн: Университет, 1997. – 225 с.
2. Глейзер, Г.Д. Развитие пространственных представлений школьников при изучении геометрии / Г.Д. Глейзер. – М.: Педагогика, 1972.
3. Гусев, В.А. Методика преподавания геометрии в школе / В.А. Гусев [и др.]. – М.: Академия, 2004. – 368 с.
4. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В.А. Гусев. – М.: Вербум-М, Академия, 2013. – 343 с.
5. Давыдов, В.В. Проблемы развивающих обучений. Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования / В.В. Давыдов. – 4-е изд., перераб. – М.: Педагогика, 2016. – 240 с.
6. Епишева, О.Б. Учить школьников учиться математике / О.Б. Епишева. – М.: Просвещение, 2011. – 127 с.
7. Истратий, А.В. Возможности использования программ трехмерного моделирования при изучении стереометрии в основной школе / А.В. Истратий // Вестник науки и образования. – Т. 3. – 2018.
8. Клековкин, Г.А. Роль и место фузионизма в школьном геометрическом образовании / Г.А. Клековкин // Образование и наука. – 2012. – № 3. – С. 77-92.
9. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в старшей школе / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 2009. – 336 с.

10. Левитас, Г.Г. Фузионизм в школьной геометрии / Г.Г. Левитас // Математика в школе. – 1995. – № 6.

11. Метельский, Н.В. Дидактика математики / Н.В. Метельский. – Мн.: Изд-во БГУ, 2012. – 254 с.

12. Методика преподавания математики в старшей школе: Общая методика / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, В.Я. Саннинский, Г.Л. Луканкин. – М.: Просвещение, 2010. – 386 с.

13. Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы / Под ред. А.И. Фетисова. – М.: Просвещение, 1967.

14. Прояева, И.В. Об особенностях преподавания отдельных вопросов стереометрии в школьном курсе геометрии / И.В. Прояева, А.Д. Сафарова // Мир науки, культуры, образования. – 2017. – № 2 (63). – С. 53-55.

15. Санина, Е.И. Обобщающее повторение начал стереометрии / Е.И. Санина // Математика в школе. – 1993. – № 6. – С. 12-14.

16. Смирнова, И.М. Компьютер помогает геометрии / И.М. Смирнова. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 2009.

17. Смирнова, И.М. Методика преподавания геометрии в школе / И.М. Смирнова. – М.: Просвещение, 2017. – 266 с.

18. Смирнова, И.М. Реализация метапредметного подхода в обучении геометрии / И.М. Смирнова // Вестник МГОУ. – 2018. – № 2. – С. 94-99.

19. Старшинова, А.В. Изучение различных видов проекций фигур как средства их изображения учащимися средней школы / А.В. Старшинова: Дисс. ... канд. пед. наук. – М., 2005.

20. Столяр, А.А. Методы обучения математике / А.А. Столяр. – Мн.: Высшая школа, 2011. – 191 с.

21. Тихомиров, В.М. Геометрия в современной математике и математическом образовании / В.М. Тихомиров // Математика в школе. – 1993. – № 4.

22. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: Пособие для учителей, методистов педагогических высших учебных заведений / Л.М. Фридман. – М.: Флинта, 2012. – 224 с.

23. Хазанкин, Р.Г. Десять заповедей учителя математики / Р.Г. Хазанкин // Народное образование. – 1991. – № 1.

24. Хазанкин, Р.Г. Как увлечь учеников математикой / Р.Г. Хазанкин // Народное образование. – 1987. – № 10.

25. Weyl, H. Mathematisches denken. – B., 2015.

26. https://multiurok.ru/

27. https://oge.sdamgia.ru/

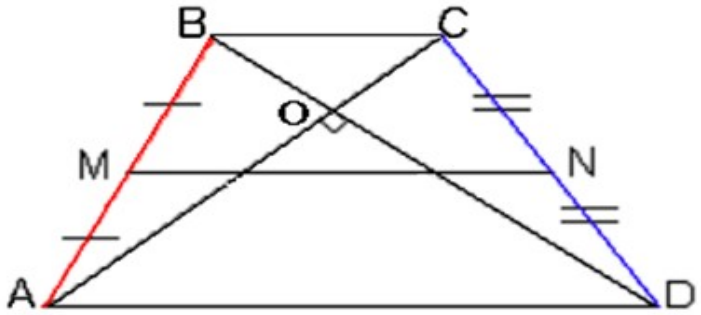
28. https://infourok.ru/

Приложение

Различные методы решения планиметрической задачи на примере конкретной задачи

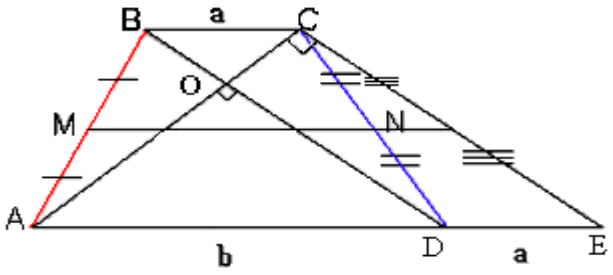
Задача:

Найти среднюю линию MN трапеции ABCD с основаниями BC и AD, если BD = 6см, AC = 8см, ⊥ AC.



1. Методы, использующие дополнительное построение (ДП)

«Прямая параллельная диагонали» [5, №33.8]



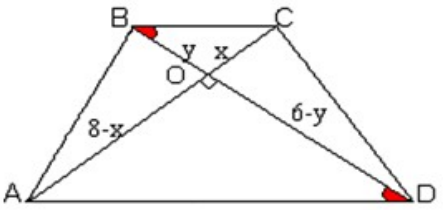
1. *ДП*: проведем CE||BD, CE∩AE=E⇒BCED - параллелограмм, (BD||CE и BC||DE, BC=DE=a, CE=BD=6см.)

2. Рассмотрим ΔACE: ∠ACE=90° (BD||CE, AC⊥BD ⇒AC⊥CE) $AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=\sqrt{64+36}=10$. MN=1/2AE = 5.

Ответ: MN = 5см.

2. Методы, основанные на подобии треугольников.

«Подобие треугольников». [1, п. 59]



1.Δ BOC~ΔAOD (по 2-м углам ∠BOC=∠AOD=90° и ∠CBO=∠ADO как накрест лежащие при BC||AD, BD - секущая) y= 4/3x, x<3 (половины AC)

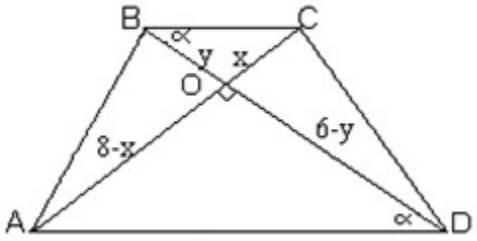
2.По теореме Пифагора:ΔAOD: AD= $\sqrt{(8-x)^2+(6-y)^2}$, =4x/3⇒AD=$\sqrt{25/9x^2}$ - 100/3+100.

3. Δ BOC: BC=5x/3 (по т.Пифагора).

4. MN= (AD+BC)/2, подставим: AD=$\sqrt{25/9x^2}$-100/3+100 и BC=5x/3 получим: $3l^2$-5lx+25x-75=0. MN=25x2-12(25x-75) =$25(x-6)^2$, MN= (10x-30)/6=5x/3-5<0 - посторонний корень, MN= (5x-5x+30)/6=5

Ответ: MN=5.

«Метод тригонометрической замены». [7].



1. ΔBOC~ΔAOD (∠CBO=∠ADO - накрест лежащие при BC||AD (по определению трапеции) и BD-сек.) ⇒x/(8-x)=a/b⇒a+b=8a/x. **2.** MN= (a+b)/2=4a/x.

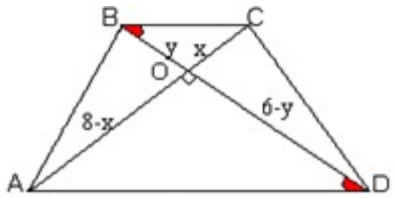
3.x/(8-x)=y/(6-y), то x/y=4/3.

4. ΔBOC: sinα=x/a, tgα=x/y=4/3, sinα=4/5⇒MN=4/sinα=5.

Ответ: MN = 5.

3. Метод, использующие соотношение между углами и сторонами треугольника

«Соотношение между углами и сторонами прямоугольного треугольника и подобие треугольников». [1,п. 66]



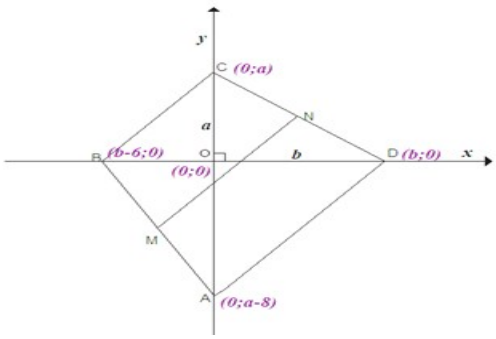
1. ΔBOC~ΔAOD (∠AOD=BOC=90°, ∠CBO=∠ADO - накрест лежащие при BC||AD)⇒y=4x/3.

2. Рассмотрим ΔBOC tgα=4/3⇒cos =3/5(1+tg^{2}α = 1/cos^{2}α) **3.** Рассмотрим ΔBOC OC/BC = cosα ⇒ BC = OC/cosα = 5x/3 **4.** Рассмотрим ΔAOD AO/AD = cosα ⇒ AD = AO/cosα = 5(6-x)/3 **5.** MN = (AD+BC)/2 = (5(x-6)/3+5x/3)/2 = 10/2 = 5

Ответ: MN = 5.

4. Координатный метод. [5, §61-62; 2п. 39]

1. Зададим оси координат по прямым: BD и AC точка O(0; 0)



2. Координаты вершин: A(0; a-8); B(b-6; 0); C(0; a); D(b; 0).

3. Найдем координаты точек M, N:

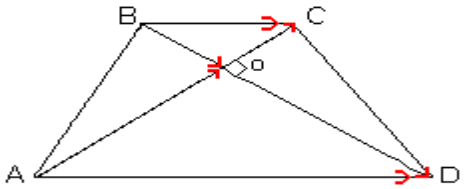
M((b-6)/2; (a-8)/2), N(b/2; a/2)

4. Найдем длину $=\sqrt{((b-8)/2-b/2)^2+((a-8)/2-2/2)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Ответ: MN =5.

5. Методы, использующие векторный аппарат

5.1 «Сложение векторов». [2, п.39]



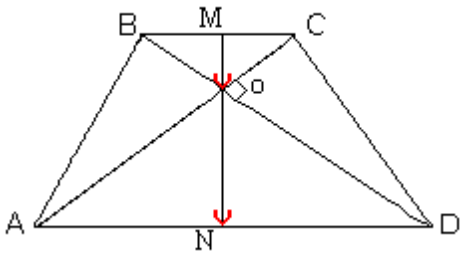
1. AD=AO+OD, BC=BO+OC (метод треугольника)

2. AD+BC = AO+OD+BO+OC = AC+BD $\Rightarrow$+BD = 2AD*BC*cos0+BC^2+AD^2 = =AC^2+2AC*BD*cos90°+BD^2 $\Rightarrow$AD+BC =10.

3. MN = (AD+BC)/2=5.

Ответ: MN = 5.

5.2 «Коллинеарные векторы» [2, п.39]



1. MO и ON - коллинеарные.

2. MO = ½(BO+OC), ON = ½ (OA+OD) ⇒ MO+ON = MN = =½(BO+CO+OA+OD) ⇒ MN = ½(CA+BD), ^{2} = ¼ (CA^2+2CF*BD*cos90°+BD^2), $MN^2 = ¼(6^2+8^2)=5$

3. В методе **1.3** мы доказали, что M_1N_1 равна средней линии трапеции, следовательно MN =5.

Ответ: MN = 5.

III. Исследование

Для того, что бы узнать какие из представленных в работе способов будут использовать ученики, для решения этой задачи, мы предложили решить эту задачу группе учащихся 8-11 классов МБОУ «Больше-Нарынская СОШ». Задачу решали 8 человек 8-9 классов и 9 человек 10-11 классов. Оказалось, что ученики, чаще всего используют «метод, основанный на подобии треугольников» (2) с использованием теоремы Пифагора (Приложение 2). Но из-за того, что получались сложные подкоренные выражения, 2 ученика 8 класса, 1 ученик 9 класса, 2 ученика 10 класса и 1 ученик 11 класса недорешали эту задачу. Полученные данные представлены в диаграмме 1.



Диаграмма 1

Далее я ознакомила учащихся 8-11 классов со списком методов решения

данной задачи. И предложила решить ее как можно большим числом методов. Полученные результаты представлены в приложении 3. После консультации 1 ученик 8 класса решил еще одним методом и 1 ученик 9 класса решил эту задачу еще тремя методами. Учащиеся 10-11 классов решили эту задачу еще 3-5 методами (Диаграмма 2)

Учащиеся не использовали при решении задачи следующие методы:

- метод, использующий векторный аппарат;
- «сложение векторов»;
- «коллинеарные векторы»;
- первый, второй признаки равенства треугольников;
- коэффициент подобия треугольников;
- метод тригонометрической замены.

Методы решения, используемые учениками 8-11 классов (после консультации)

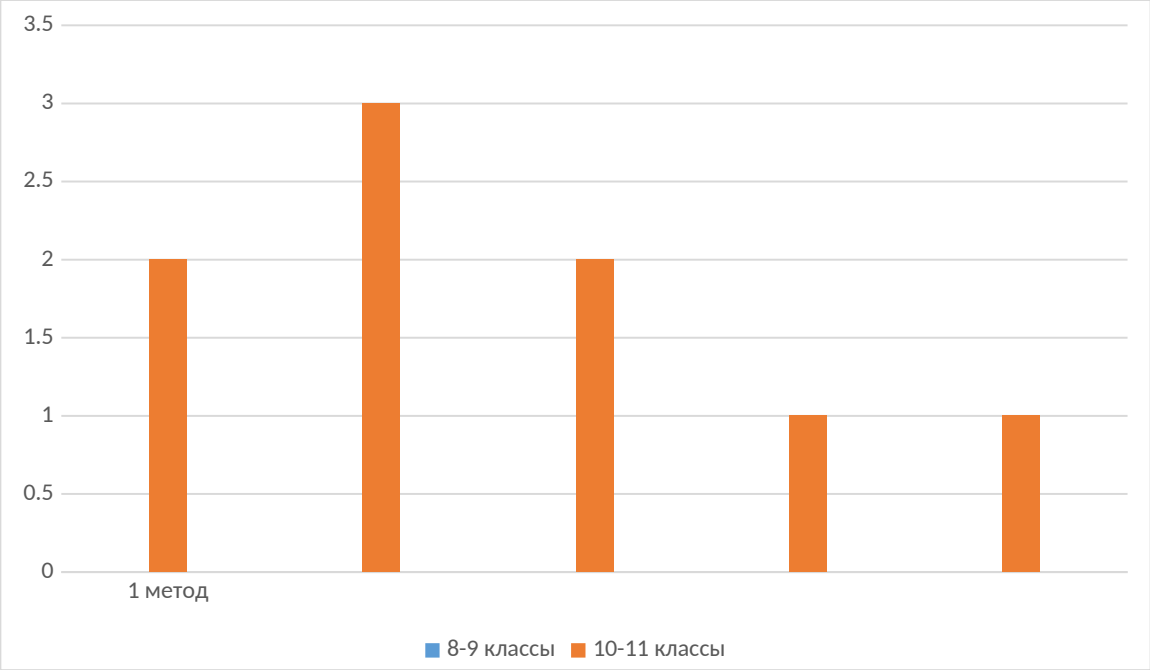


Диаграмма 2.