МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (РИНХ)

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал)

Кафедра математики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой _____
канд. физ.-мат. наук, доцент Сидорякина В.В.
« 14 » января 2021г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему:

«ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ КАК СРЕДСТВО ПОВТОРЕНИЯ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ»»

Выполнил
студент группы MATGZ-131 Н.В. Склярова

Направление (специальность) 44.04.01 Педагогическое образование

Направленность 44.04.01.05 Математическое образование

Руководитель выпускной квалификационной работы
канд. физ.-мат. наук, доцент,
доцент кафедры А.В. Забеглов

Таганрог, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....3

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ К ИЗУЧЕНИЮ ОСНОВ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.....7

1.1. История развития векторного исчисления.....7

1.2. Векторное исчисление в курсе математики. Различные подходы к определению понятия вектора.....9

1.3. Анализ учебной литературы.....14

1.4. Изучение векторного метода в средней школе.....25

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЙ.....33

2.1. Основные типы задач, решаемые векторным методом.....33

2.2. Доказательство алгебраических и геометрических неравенств, с применением скалярного произведения.....44

2.3. Тестовые задания по переводу геометрического содержания задачи на векторный язык.....46

ГЛАВА 3. ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ 59

3.1. Задачи на нахождение угла, решаемые векторным методом в открытых банках заданий.....59

3.2. Задачи на нахождение расстояний, решаемые векторным методом в открытых банках заданий.....71

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....81

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИСТОЧНИКОВ.....82

ВВЕДЕНИЕ

Вектор является одним из основных математических понятий. При помощи векторного метода эффективно решаются различные задачи курса планиметрии и стереометрии. Применяемые в рамках евклидовой геометрии векторные методы значительно упрощают доказательства многих теорем и решение задач. Например, доказательства теоремы косинусов, теоремы о трех перпендикулярах и других стали значительно проще при применении скалярного произведениях векторов. Но роль векторов – не только в упрощении трудных мест школьного курса. Гораздо важнее то, что векторные методы находят сейчас широкое применение в физике, химии, экономике, биологии, не говоря уже о многих разделах современной математики. Так, скалярное произведение вектора силы и вектора перемещения есть работа, векторное произведение вектора тока и вектора напряженности магнитного поля есть сила воздействия этого поля на проводник и т. д. И здесь геометрия диктовала физике введение новых понятий, а не наоборот. А впоследствии, при рассмотрении многомерных пространств, скалярное произведение приобрело ещё больший вес и значение и стало важным рабочим аппаратом, применяемым буквально во всех областях математики и ее приложений. Кроме того, сам курс векторного исчисления в школе, является подготовительным этапом его дальнейшего развития и изучения на более глубоком уровне для большинства различных предметов в области высшего профессионального образования.

В настоящее время в практике преподавания сложилась ситуация, которая свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии. Геометрическая задача 14 в Едином Государственном Экзамене (стереометрия) повышенного уровня сложности имеет низкий процент выполнения (средний процент выполнения – 2,5), что свидетельствует о несформированности у большинства выпускников умения строить изображения многогранников и сечения многогранников плоскостями,

комбинировать различные методы решения задач с использованием свойств фигур, пользоваться векторами и координатами для решения задач. Пути исправления ситуации видятся в полноценном изучении геометрии. Это обуславливает актуальность тематики выпускной квалификационной работы.

Объект исследования – изучение геометрии в старших классах общеобразовательной школы;

Предмет исследования – задачи и упражнения, позволяющие повторить тему «Векторы» и актуализировать использование векторных методов в решении геометрических задач.

Целью работы является выявление условий эффективного обучения учащихся векторному методу и разработка тестовых задач и упражнений для повторения темы «Векторы»

Для достижения указанной цели в работе последовательно решается ряд задач:

В первой главе, которая носит подготовительный характер, рассмотрены различные подходы к определению понятия вектора, история формирования данного понятия в контексте развития различных разделов естествознания и математического образования. В частности затронут подход Вейля к аксиоматическому построению геометрии на основе понятия вектора, который, как показывает анализ учебной литературы, является основополагающим при построении практически всех наиболее распространенных учебных пособий. Это комплекты учебников геометрии Атанасян Л.С., Бутузова В.Ф., Кадомцева С.Б. и др. Геометрия 7-11 классы, Погорелова А.В. Геометрия 7-11 классы, А.Д. Александрова, А.Л. Вернер, В.И. Рыжика. Геометрия 7-11. Анализ темы в представленных учебниках позволили выявить общие принципы построения методики и ее различия у разных авторов, что позволило определить цели изучения векторного метода в средней школе. К ним относят…

Анализ решения задач векторным методом, позволил сформулировать в работе основные компоненты векторного метода решения задач и

понятийного аппарата, которым должен овладеть ученик, чтобы решать задачи векторным методом.

Вторая глава посвящена изучению векторного метода в решении задач и доказательствах утверждений. В ней рассмотрены два основных типа геометрических задач аффинных и метрических, в решении которых целесообразно применение векторного метода. Задачу называют аффинной, если она не связана с измерением отрезков и углов (прямо или косвенно). В противном случае задачу называют метрической или евклидовой. Среди них имеются задачи на доказательство и на вычисление, планиметрические и стереометрические. В задачах с аффинным содержанием обычно требуется установить принадлежность трёх точек одной прямой или четырёх точек одной плоскости, вычислить отношение, в котором точка, принадлежащая отрезку, делит этот отрезок, доказать параллельность отрезков или прямых, сонаправленность или противоположную направленность лучей, параллельность прямых и плоскостей. Реже встречаются задачи на нахождение различных множеств точек. В метрических же задачах преимущественно приходится вычислять расстояния и углы (междупрямыми, прямой и плоскостью, двугранные углы), доказывать перпендикулярность прямых и плоскостей и значительно реже находить и изучать множества точек на плоскости и в пространстве. Решению этих задач посвящена большая часть второй главы. Опыт показывает, что самое трудное для учащихся – это научиться делать перевод геометрического факта на язык векторов и обратный перевод.

Чтобы сформировать у учеников умение переводить текст задачи на векторный язык, следует отработать сначала перевод отдельных элементов текста задачи и их связей на векторный язык, а уж затем чтение векторных соотношений. Для выработки отмеченных навыков в работе составлен ряд базовых тестовых заданий и упражнений, решение которых позволяет закрепить навык перевода основных геометрических понятий на язык векторов и находить геометрические интерпретации

векторных выражений. Эти задания систематизируют знания учеников по векторной алгебре, помогает правильно выбрать векторы, которые удобно использовать для решения задачи, а также помогает записать условие задачи с помощью выбранных векторов и сделать соответствующие выводы и обобщения по мере выявления зависимости между ними. Кроме этого в заключительной части работы рассмотрены все основные типы задач, встречающиеся в открытом банке заданий, решение которых рационально векторным методом. Это задачи по нахождению угла между прямыми, угла между прямой и плоскостью, угла между плоскостями; задачи на вычисление расстояния от точки до плоскости и расстояния между скрещивающимися прямыми. Следует отметить, что последние задачи относятся к заданиям профильного уровня и требуют от учащихся владения векторным методом на достаточно высоком уровне.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ К ИЗУЧЕНИЮ ОСНОВ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1. История развития векторного исчисления.

Несмотря на то, что векторное исчисление в современном виде сформировалось в середине 19в., его истоки лежат в далеком прошлом. В Древней Греции математики пытались найти решение многих задач алгебры и арифметики геометрическим путем. В работе Евклида «Начала», алгебраические операции сложения и умножения интерпретировались как сложение отрезков и построение на них прямоугольников. Была заложена геометрическая теория отношений Евдокса. Вместе с этим, сам термин «сложения движений», был уже сформулирован механиками и астрономами и применялся в работах Архимеда и Птолемея. В 16 веке фламандец С. Стевин публикует трактат «Основы статики», в котором впервые применяет правило параллелограмма для сложения сил и использует для их обозначения стрелки. Позже, в 17 веке, Валлис в «Механике» использует правила, в точности, совпадающие с правилами параллелограмма и параллелепипеда. С их помощью автор складывает различные физические величины. Астроном Кеплер, при формулировке своих законов движения планет использует направленный отрезок с центром в Солнце и концом, направленным к движущемуся телу. Однако говорить о формировании векторной величины в то время было еще рано. Дальнейшее развитие векторное направление получило уже в алгебраической сфере и связано с трудами датского землемера ГаспараВесселя, который в 1797 году представил академии наук в Копенгагене свой труд «О геометрической интерпретации комплексных чисел». Именно ему приписывают первое представление комплексных чисел, как направленных отрезков, введению операций умножения и деления при помощи их записи в тригонометрической форме. Вессель вводит правила сложения направленных отрезков на плоскости и в пространстве, развивая «алгебру вращения сферы», для решения задач по отысканию элементов

сферических треугольников и многоугольников. Таким образом, развитие элементов векторного исчисления послужило решению прикладных задач, связанных с геодезией. Представление комплексных чисел $z = a + ib$ в виде направленных отрезков, использованное вначале Весселем, а в последствии Гауссом, давало возможность их плодотворного применения в решении двумерных задач планиметрии и математической физики. Позднее английские математики Д. Пикок, Д. Грегори, А. Де Морган, У. Гамильтон предпринимали попытки обобщить теорию комплексных чисел, на случай трех измерений, изучая вначале триплеты - выражения вида

$$z = a + ib + jc,\ i^2 = j^2 = -1,\ a,b,c \in R,$$

а затем, не добившись успеха и кватернионы

$$z = a + ib + jc + \kappa d,\ i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ a,b,c,d \in R.$$

«Лекции о кватернионах» 1843г. Гамильтона явились основным алгебраическим источником современного векторного исчисления. В этой работе впервые вводится термины «вектор», «скаляр», «скалярное произведение», «векторное произведение» и изучены операции над векторами в пространстве. Именно теория кватернионов, развитая впоследствии П. Тетом, дала возможность использовать аппарат векторного исчисления в аналитической геометрии. «Элементарный трактат по теории кватернионов» содержит главу «Геометрия прямой и плоскости» в которой сформулированы и решены базовые задачи аналитической геометрии, которые и по сегодняшний день входят в учебники. Окончательное становление векторного исчисление произошло во второй половине 19 века и связано с именами Д. Максвелла и Г. Грассмана, которые явились предшественниками синтеза физического, алгебраического и геометрического направлений, в развитии векторного исчисления и оформлении его в независимый раздел математики.

В настоящее время действия с векторами изучает раздел именуемый векторной алгеброй, наряду с ним существует, созданный Гамильтоном векторный анализ, изучающие вектор-функции.

Векторное исчисление, возникшее из решения прикладных задач в геодезии, астрономии и механике, в настоящее время используется практически во всех разделах математики, физики и других наук, подчеркивая тесную связь между ними, и является одним из краеугольных камней всего естествознания.

1.2. Векторное исчисление в курсе математики. Различные подходы к определению понятия вектора.

Рассмотрим основные подходы к определению вектора, встречающиеся в различных учебных курсах

Абстрактный - представлен, в «Курсе аналитической геометрии и алгебры» Д.В. Беклемишева [3]. Вектор определяется, посредством описания свойств операций сложения и умножения на число, которые более чем-либо другим не определены.

Определение. Вектор - элемент пространства ***V,*** произвольной природы с введенными на нем операциями сложения элементов и умножения элемента на действительное число, такими, что указанные операции удовлетворяют требованиям 8 аксиом:

A1. $(a+b)+c=a+(b+c), \forall a,b,c \in V$;

A2. $a+b=b+a, \forall a,b \in V$;

A3. $\exists 0 \in V, a+0=a, \forall a \in V$;

A4. $\forall a \in V, \exists (-a) \in V, a+(-a)=0$;

A5. $1 \cdot a = a, \forall a \in V, 1 \in R$;

A6. $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a, \forall \alpha, \beta \in R, a \in V$;

A7. $(\alpha+\beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a, \forall a \in V, \forall \alpha, \beta \in R$;

А8. $\alpha \cdot(a+b)=\alpha a+\alpha b,\ \forall a,b\in V,\ \forall\alpha\in R$.

В данном случае определение вводится аксиоматически. После чего приводятся примеры таких векторных пространств, таких как V^2 - множество направленных отрезков на плоскости. C - множество комплексных чисел над *R*.

Алгебраический – реализуется в учебнике Л.Я. Куликова «Алгебра и теория чисел» [4]:

Определение. *n*-мерным вектором над полем *F* называется любой кортеж из *n* – элементов поля *F*. Обозначается в виде $a=(\alpha^1,\alpha^2,...\alpha^n)$.

Вводятся определения равных векторов, сложения векторов и умножения вектора на число.

Определение. Векторы $a=(\alpha^1,\alpha^2,...\alpha^n)$ и $b=(\beta^1,\beta^2,...\beta^n)$ называют равными, если $\alpha^i=\beta^i,\ \forall i$;

Определение. Суммой векторов a и b называют вектор $a+b=(\alpha^1+\beta^1,\alpha^2+\beta^2,...\alpha^n+\beta^n)$.

Определение. Произведением скаляра λ на вектор a называют вектор $\lambda a=(\lambda\alpha^1,\lambda\alpha^2,...\lambda\alpha^n)$.

Определение. Вектор $(0,0,...0)$ - называют нулевым.

Определение. Вектор $-a=(-\alpha^1,-\alpha^2,...-\alpha^n)$ называют противоположным вектору $a=(\alpha^1,\alpha^2,...\alpha^n)$.

Этот подход является в большей мере алгебраическим и сводит действия над объектами к операциям над числами.

Наряду с этими подходами к определению вектора, существуют различные геометрические интерпретации вектора, согласно которым «вектор это геометрический объект, характеризующийся направлением и длиной».

Традиционный

Вектор понимается как множество сонаправленных отрезков, имеющих одинаковую длину. Под длиной вектора понимают длину отрезка, который его представляет. Векторы рассматривают с точностью до их параллельного переноса, и называют свободными. Равные векторы, не совпадающие по положению, рассматриваются как различные конкретные изображения одного и того же свободного вектора.

Данный подход реализуется во многих учебных пособиях и имеет ряд преимуществ. Он упрощает понятия равенства, однозначно определяет операции для свободных векторов, но, тем не менее, осложняется некоторыми нюансами. Примером может служить изображение силы, как физической величины в виде направленного отрезка, однако она не может быть изображена вектором в смысле этого определения, поскольку силы, изображаемые равными направленными отрезками, производят различные действия. (Если сила действует на упругое тело, то отрезок ее изображающий, не может быть перенесен по прямой)

Вектор, как параллельный перенос

Параллельным переносом называют такое движение в пространстве, при котором точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние в одном и том же направлении. При данном подходе вектор определен как, параллельный перенос плоскости. Это позволяет устранить противоречия между понятиями равенства и эквивалентности, присутствующее в традиционном определении вектора, как направленного отрезка и определяет логически строгое изложение векторного исчисления. Однако он лишен наглядности.

Вектор, как направленный отрезок

Чаще всего встречается в изложении курса геометрии. Фундамент понятия составляют следующие определения:

Определение. Пара точек, для которых указано, какая из них первая, а какая вторая, называется упорядоченной.

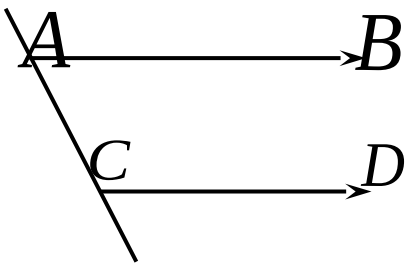
Определение. Отрезок, концы которого упорядочены, называется вектором.

Определение. Расстояние между началом и концом отрезка называют его длиной.

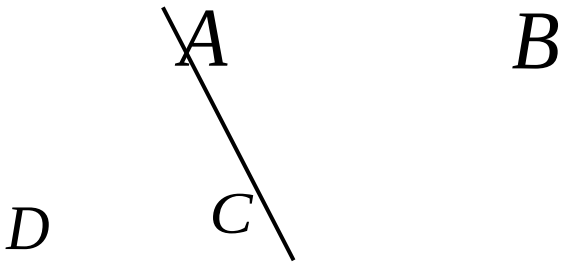
Определение. Векторы называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой.

Определение. Векторы $\overline{AB}$ *и* $\overline{CD}$ называются сонаправленными $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$, если а) они лежат на параллельных прямых;

б) лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC.

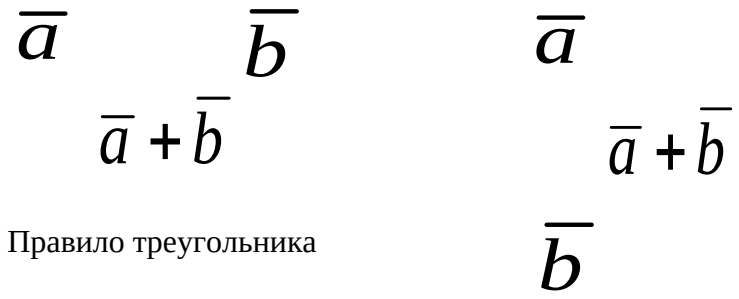


Если условие а) выполняется, а б) не выполнено, то векторы называют противоположно направленными $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$



Определение. Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины.

Определение. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют вектор, построенный на $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по правилу треугольника или правилу параллелограмма.



Правило треугольника Правило парал-ма

Рис.1.1Правила сложения векторов

Определение. Произведением вектора $\bar{a}$ на действительное число α называется вектор $\bar{b}=\alpha\cdot\bar{a}$

такой, что а) $|\bar{b}|=|\alpha|\cdot|\bar{a}|$;

б) $\bar{b}\uparrow\uparrow\bar{a}$, *если* $\alpha>0$ или $\bar{b}\uparrow\downarrow\bar{a}$, *если* $\alpha<0$.

Данный подход к определению вектора обладает достаточно высоким уровнем наглядности, но определяет результат действий над векторами с достаточно большим произволом.

Подход Вейля к определению вектора.

На фоне всех уже перечисленных подходов к определению понятия вектора нельзя оставить в стороне еще один, отличный от всех остальных, подход

Вейля, послуживший отправной точкой создания целой аксиоматики.

Идея Вейля состояла в том, чтобы принять в качестве неопределяемых понятий точку и вектор, а в качестве аксиом - свойства сложения векторов и умножения вектора на число. А именно, согласно аксиоматике Вейля, операция сложения векторов должны удовлетворять требованиям группы аксиом А1.1-А1.4

А1.1. $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V, \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a},$;

А1.2. $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V \ (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}),$;

А1.3. $\forall \bar{a} \in V, \exists! \bar{x} \in V, \bar{a} + \bar{x} = \bar{a},$;

А1.4. $\forall \bar{a} \in V, \exists! \bar{y} \in V, \bar{a} + \bar{y} = 0$,

операция умножения, требованиям аксиом

А2.1-А2.4

А2.1. $\forall \bar{a} \in V, \ \forall \alpha, \beta \in R \ (\alpha + \beta) \cdot \bar{a} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}$

А2.2. $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V, \ \forall \bar{\alpha} \in R \ \alpha \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \alpha \bar{a} + \alpha \bar{b},$

А2.3. $\forall \alpha, \beta \in R, \bar{a} \in V \ \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{a}$

А2.4. $\forall \bar{a} \in V, 1 \in R \ 1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$.

Кроме этих групп Вейль вводит группу аксиом размерности, группу аксиом скалярного умножения, а в последней 5 группе рассматривает аксиомы точек – свойства, устанавливающие связь между неопределяемыми понятиями вектора и точки.

А3.1. $\forall A, B, C \in T \ \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$,

А3.2. $\forall A \in T, \bar{a} \in V, \exists! B \in T \, \overline{AB} = \bar{a}$,

А3.3. $\forall A, B \in T \ \overline{AB} = 0 \Rightarrow A = B$

Такой подход имеет ряд преимуществ. «С формальной стороны это лишь один из возможных путей аксиоматизации геометрии, эквивалентный гильбертовскому, т. е. позволяющий доказать те же самые теоремы. Но с методологической точки зрения вейлевский путь является неизмеримо более

ценным. Вместо скрупулезной, утомительной и длинной цепочки рассуждений по гильбертовской схеме (к тому же оторванной от других разделов математики и от естественных наук) вейлевская схема дает исключительно ясное и краткое изложение, насыщенное современными идеями и близкое к наиболее актуальным разделам математики, физики, экономики и других областей знания» [6]

1.3. Анализ учебной литературы.

Тема «Векторы» появляется в курсе математики тогда еще советского школьного образования в 1963 году. Вопрос о ее присутствии и значимости темы практически не возникал. Вектор является одним из фундаментальных понятий математики и присутствие в школьном курсе векторного метода позволяет, во-первых, упростить решение многих задач, которые другими методами решаются труднее, внести в доказательства теорем и решение задач элемент наглядности, сделать приобретение геометрических знаний более естественным и доступным. Во-вторых, понятие вектора востребовано в изучении школьного курса физики и астрономии, что играет существенную роль в межпредметных связях. И в-третьих дает возможность заложить основы многих понятий, связанных с векторным исчислением и его применением во многих приложениях математики. Несмотря на то внимание, которое уделяется теме «Векторы», она была и остается наиболее трудной темой как для восприятия учащимися, так и для методики преподавания. Сложность темы подчеркивают исследования таких математиков, как А.Д. Александров, Л.С. Атанасян, В.А. Погорелов, А.Н. Колмогоров и многих других. Изучению методики преподавания темы «Векторы» в школьном курсе геометрии посвящено много работ. Их анализ позволяет сформулировать те моменты, которые вызывают у учащихся наибольшие затруднения:[2]

-способ введения понятия вектора;

-свойства сложения векторов и умножения вектора на число, скалярного умножения векторов;

-доказательства теорем, использующие переместительный и сочетательный законы сложения векторов, теоремы о выражении скалярного произведения векторов через координаты.

Эти трудности представляют те противоречия, которые возникает между необходимостью обучения учащихся векторному методу, и его практической реализацией. Остановимся на них более подробно, анализируя, различные школьные учебные пособия.

Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия 7-11 классы

Тема «Векторы» впервые рассматривается в 8 классе и ему отведена 9 глава, состоящая из 3 параграфов.

§1. Понятие вектора

Понятие вектора вводится на основе уже встречавшихся в курсе физики у учеников векторных величин. В качестве такого примера здесь выступает сила. Далее авторы, отвлекаясь от конкретных физических свойств, переходит к геометрическому понятию вектора. **Вектор или направленный отрезок** определен, как отрезок, «для которого указано, какая из его точек является началом, а какая - концом» После этого вводится условие считать точку нулевым вектором, и определяется длина или модуль вектора, как длина отрезка, который его представляет. Второй пункт §1 дает определение равных векторов. Для этого авторы вновь обращаются к примеру движения тела, в котором все его точки движутся с одной и той же скоростью в одном и том же направлении. Указывая на то, что скорость является векторной величиной, а она изображается направленным отрезком, делается вывод о том, как определить равенство векторов. Рассмотрев дополнительно условие коллинеарности и сонаправленности векторов, в этом пункте дается определение **равных векторов**, как **сонаправленных векторов одной длины.** Заключительный пункт этого параграфа посвящен откладыванию вектора от данной точки. В нем доказывается утверждение, того, что **от любой точки может быть отложен вектор равный данному и притом только один**. Доказательство единственности опирается на построение, как и

все предыдущие рассуждения. Также в конце параграфа присутствуют практические упражнения, направленные на закрепление введенных понятий и их свойств.

§2. Сложение и вычитание векторов.

Посвящен сумме и разности векторов. Как и прежде, на примере перемещения материальной точки из точки A в B, а затем из B в C, делается вывод об их сумме, как сумме направленных отрезков. Полученное правило суммирования оформляется, как правило треугольника. С его помощью доказываются переместительный и сочетательный закон сложения векторов:

Для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ справедливы равенства:

1° $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ **-переместительный закон;**

2° $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ **-сочетательный закон.**

В процессе доказательства обосновывается правило параллелограмма, которое также используется при сложении векторов. Правила треугольника и параллелограмма обобщаются на случай сложения произвольного числа векторов. Их сумма определяется по правилу многоугольника.

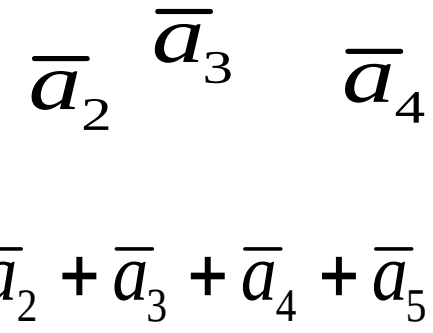


Рис.1.2. Правило многоугольника

Разность векторов $\bar{a} - \bar{b}$ определяется, как вектор, сумма которого с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$. Здесь же определяется противоположный вектор. Практические задания содержат задачи на применение правил суммирования

векторов и нахождения их разности. Вопросы и задачи содержат задания на доказательство неравенств, в которых фигурируют модуль суммы и разности векторов. Также присутствуют задачи на выражение одних векторов через другие.

§3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач.

В этом параграфе авторы по сложившейся традиции рассматривают операцию умножения вектора на число на примере такой физической величины, как скорость трех автомобилей. Она в данном примере имеет одно и то же направление, но отличается по модулю. Пример, как и в предыдущих случаях, наводит на правило умножение векторов на число.

Произведением ненулевого вектора $\bar{a}$ на число k называется такой вектор $\bar{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\bar{a}|$, причем $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, $npu\ k \geq 0$ и $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$, $npu\ k < 0$.

Доказываются, свойства операции умножения вектора на число.

Для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:

$1^0\ k \cdot (l \cdot \bar{a}) = (k \cdot l) \cdot \bar{a}$ - сочетательный закон;

$2^0\ (k + l) \cdot \bar{a} = k \cdot \bar{a} + l \cdot \bar{a}$ - первый распределительный закон;

$3^0\ k \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$ второй распределительный закон.

Этот параграф содержит достаточно большое количество задач, которые могут решаться при помощи векторов. Доказанным примером такого применения служит теорема о средней линии трапеции. Здесь же собраны задания повышенной трудности.

Учебный материал для **9 класса** начинается с **главы 10 «Метод координат»**

§1 Координаты векторовначинается с доказательства леммы о коллинеарных векторах:

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и $\bar{a} \neq 0$, то существует такое число k, что $\bar{b} = k \cdot \bar{a}$.

Доказывается теорема о разложении любого вектора по двум неколлинеарным векторам и его единственности. Вводятся координатные векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$. Они используются в уже доказанной теореме, в качестве неколлинеарных векторов, по которым производится разложение. Речь идет фактически о введения базиса на плоскости, хотя понятия линейной зависимости и независимости векторов в явном виде нет. Координаты вектора определяются классическим способом, как коэффициенты разложения вектора по $\bar{i}$ и $\bar{j}$.

На основе этого определения координат в пункте 87 доказываются свойства о координатах суммы, разности векторов и произведение вектора на число. В §2 рассматривается связь между координатами вектора и координатами точек, его образующих. Вводится в рассмотрение понятие радиус-вектора точки и доказывается, что координаты точки совпадают с координатами радиус-вектора. В пункте 89 решаются простейшие вспомогательные задачи в координатах: нахождение середины отрезка, вычисление длины вектора по его координатам, и задача о вычислении расстояния между двумя точками. Завершает эту главу §3 Уравнение окружности и прямой и задачи связанные с ними. В **Главе 11 «Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов»** после определения основных тригонометрических функций угла и соотношений в треугольнике, авторы определяют скалярное произведение векторов.

Скалярное произведение векторов, есть произведение их длин на косинус угла между ними. $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a}, \bar{b})$**.** После вывода отношения $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ рассматривается выражение скалярного произведения в координатах: **В прямоугольной системе координат скалярное**

произведение векторов $\bar{a} = \{a_1, a_2\}$ **и** $\bar{b} = \{b_1, b_2\}$ **выражается формулой** $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$**.** Завершает векторную тематику изучение свойств скалярного произведения и применение скалярного произведения к решению задач. Следующим этапом в изучении векторов в курсе геометрии, представленным данным учебным пособием является изучение векторов в пространстве, которое начинается с одноименной главы и рассматривается в 10 классе. Структура материала повторяет изучение векторов на плоскости. Дополнительно вводится понятие компланарных векторов, правило параллелограмма обобщается правилом параллелепипеда, и в 45 пункте рассматривается разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Метод координат, изучаемый в главе 5, методически повторяет аналогичный материал для плоскости, с тем отличием, что задачи решаются в трехмерном пространстве. Скалярное произведение используется для вывода уравнения плоскости. Таким образом, весь материал, представленный в данном пособии, можно представить в виде следующей таблицы.

8 класс	**9 класс**	**10 класс**	**11 класс**
Векторы на плоскости. 1. Определение вектора. 2.Коллинеарные векторы. Равные векторы. 3. Откладывание вектора от точки. 4. Сложение и вычитание векторов.	**Метод координат** 1. Лемма о коллинеарных векторах. 2. Разложение вектора по двум неколлинеарным. 3.Координаты вектора. 4. Координаты суммы, разности векторов;	**Векторы в пространстве**. 1. Понятие вектора в пространстве. Сложение и вычитание векторов. 2. Компланарные векторы. 3. .Метод координат в	

Свойства. 5. Умножение вектора на число. Свойства.	произведения вектора на число. 5. Уравнение прямой и окружности. 6. Скалярное произведение векторов. Выражение скалярного произведения в координатах.	пространстве. 4. Координаты точки, координаты вектора. 5. Скалярное произведение. 6. Движения.	

Таблица 1.Распределение учебного материала в учебнике Л.С. Атанасяна

Вывод: Тема «Векторы», в одном из самых распространенном учебном пособии по геометрии опирается на модель, в которой вектор представляет собой направленный отрезок. Изложение материала проводится по направлению, которое задается аксиоматикой Вейля. Выбранная модель, обладает высокой степенью наглядности, соотносится с задачами из курса физики и удовлетворяет основным потребностям в геометрических знаниях у школьников. К недостаткам следует отнести нарушение математической строгости изложения материала, по сути, модель заменяет математическое понятие и как следствие не предполагает других представителей векторных пространств, кроме направленных отрезков. Отношение равенства заменяет отношение эквивалентности, которое является более актуальным при определении вектора, как класса эквивалентности. Определение суммы в явном виде отсутствует, его заменяет правило построения суммы векторов. Очевидны большие затраты времени на изучение темы.

Погорелов А.В. Геометрия 7-11 классы

Изложение материала начинается в 8 классе с 10 параграфа. Вектор определен как направленный отрезок и обозначается либо как самостоятельный элемент $\bar{a}$, либо посредством задания двух точек $\overline{AB}$. Сразу вводится понятие сонаправленных и противоположно направленных векторов, абсолютная величина или модуль и нулевой вектор. Равенство векторов определено посредством их совмещения параллельным переносом. В пункте 93 [9] определяются координаты вектора как разности координат начала и конца. Таким образом, использую связь с формулой расстояния между двумя точками, автор сразу получает формулу для вычисления модуля вектора. Сложение векторов определено в пункте 94 как вектор с суммой координат. Доказывается **теорема«Каковы бы ни были точки** A,B,C**, имеет место векторное равенство** $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$**».** Именно она дает возможность наглядно представить правило суммы векторов в виде правила треугольников и правила параллелограмма. 95 пункт «**Сложение сил»** описывает возможность разложения вектора, по его проекциям на оси, в том числе и перпендикулярные друг другу. Умножение вектора на число определяется также посредством координат с приданием ему геометрического смысла в виде доказанной теоремы. В пункте 97 дается определение коллинеарных векторов, как лежащих на одной или параллельных прямых и доказывается, что любой вектор плоскости может быть представлен в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов. Заключительные два пункта 98 и 99 посвящены заданию операции скалярного умножения, как суммы произведений соответствующих координат, определению угла между векторами и разложению вектора по координатным осям, при помощи ортов. К теме «**Векторы в пространстве**» автор обращается в 10 классе. Изложение материала проводится в той же последовательности, как и для векторов на плоскости, с учетом добавления еще одной координаты. В 37 пункте вводится понятие компланарных

векторов. И доказывается теорема о разложении произвольного вектора по трем некомпланарным векторам. План изложения дает следующая таблица:

8 класс	**9 класс**	**10 класс**	**11 класс**
Векторы на плоскости. 1. Абсолютная величина и направление вектора. 2. Равенство векторов. Координаты векторов. 3. Сложение векторов. Умножение вектора на число. 4. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. 5. Скалярное произведение векторов. 6. Разложение вектора по координатным осям.		**Векторы в пространстве**. 1. Векторы в пространстве. 2. Действия над векторами в пространстве 3. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. 4. Уравнение плоскости.	

Таблица 2.Распределение учебного материала в учебнике А.В. Погорелова

Вывод: В рассмотренном учебном пособии, вектор также представляет направленный отрезок. Сумма и произведение вектора на число определяются посредством координат. Это определения являются математически строгими, позволяют значительно сэкономить время

изложения так, как идет изучение двух тем в одной, однако они лишены наглядности, как элемента, который помогает изучению данной темы. Кроме этого, к недостаткам изложения можно отнести малое привлечение физических примеров при рассмотрении темы. Несомненным плюсом является краткость изложения материала.

А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. Геометрия 7-11

Тема «**Векторы и координаты**» изучается в начале 9 класса. Определению вектора предшествует разбор понятий векторных и скалярных величин. Вектор определен, как направленный отрезок. Вводится определение сонаправленных векторов, коллинеарных и ортогональных векторов, доказывается признак сонаправленности. Следует отметить, то, что работа над векторами не ограничена плоскостью, отдельные пункты доказательств даются для векторов в пространстве. Кроме этого отличительным признаком изложения темы в данном учебном курсе является то, что авторы уделили должное внимание раскрытию взаимосвязи понятий равенства и эквивалентности векторов как множеств отрезков имеющих одинаковую длину и направление. В §2 дается определение суммы векторов, которое иллюстрируется правилом треугольника на примере перемещения физического тела из точки в точку. Также на примере действия двух векторов скорости вводится правило параллелограмма. В пункте 2.3 определяется вычитание векторов, как операция, обратная сложению. Понятие противоположного вектора возникает, при необходимости свести разность к сложению. В §3 вводится правило умножения вектора на число, на основе которого доказываются основные свойства умножения и теорема о свойстве коллинеарных векторов.

Вывод: Как и в предыдущих учебниках, вектор изучается, как направленный отрезок. Материал темы строго не разделен плоскостью и пространством, и содержит различный дополнительный материал, позволяющий раскрыть тему. Такой углубленный подход обусловлен тем, что учебник изначально предназначен для учащихся школ и классов с физико-математическим

профилем. К недостаткам изложения можно отнести относительно малый объем визуальной информации по теме, в которой он так необходим. Но это характерная особенность изложения не только одного отдельно взятого вопроса. Наглядную картину о количестве визуальной информации дает, например, диаграмма [10]

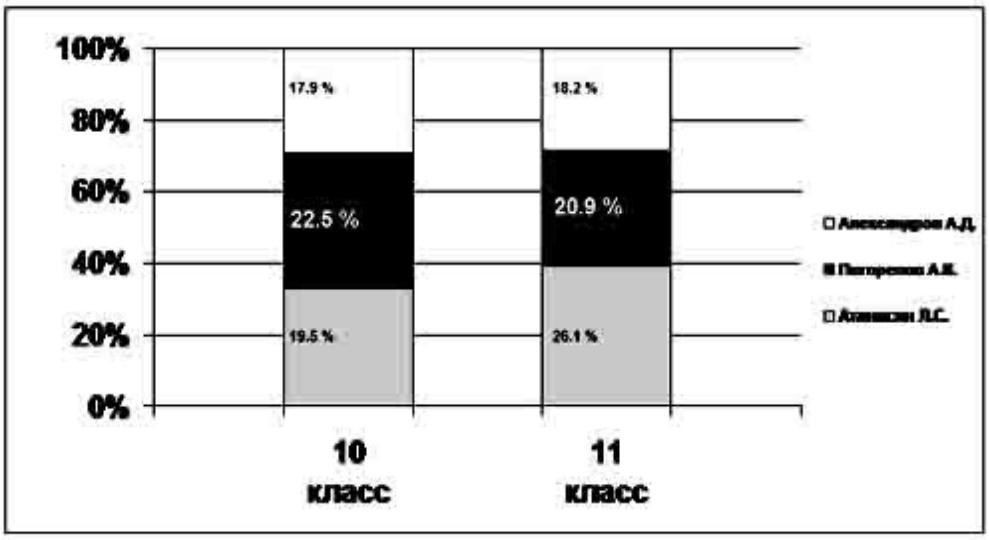


Таблица 3.Визуальная информация в учебных пособиях

1.4. Изучение векторного метода в средней школе.

Цели изучения векторного метода в средней школе:

1) дать эффективный метод решения различных геометрических задач (как аффинных, так и метрических) и доказательства теорем;

2) показать широкое применение векторного аппарата в других областях знаний: технике, физике, химии, лингвистике и т. д. и на базе этого формировать учащихся диалектико-материалистичное мировоззрение;

3) использовать векторный метод при решении задач с целью формирования у учащихся умения выполнять обобщение и конкретизацию;

4) формировать у учащихся такие качества мышления, как: гибкость (не шаблонность), целенаправленность, рациональность, критичность и др.

Основные компоненты векторного метода решения задач:

Рассмотрим решение следующей задачи векторным методом.

«В треугольной пирамиде *DABC* плоские углы при вершине равны по 90°. Боковые ребра *AD*=6, *DB*=8, *DC*=24. Точка *M* равноудалена от всех вершин пирамиды. Найти расстояние *DM*».

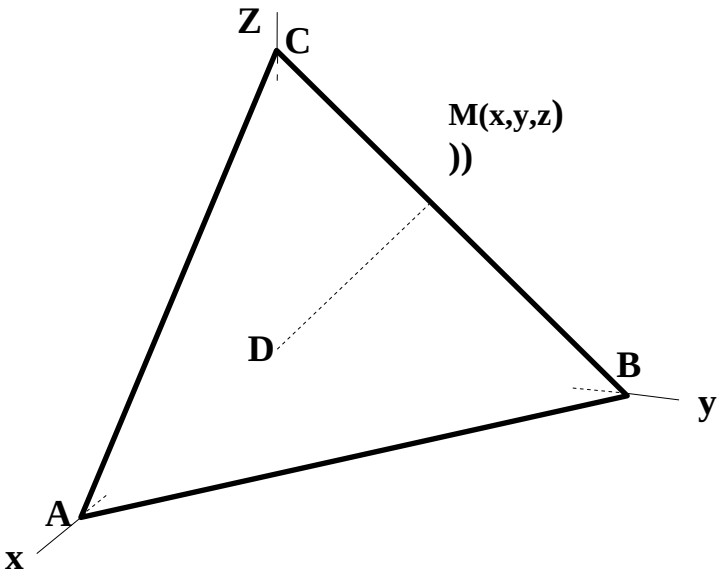


Рис. 1.3. Иллюстрация к задаче

Решение:

Выберем направление осей прямоугольной системы координат так, как показано на рис. 1.3, поместив в её начало вершину D. Пусть *M(x, y, z).*

Выберем базисные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Тогда разложение векторов $\overline{AM}, \overline{BM}, \overline{CM}, \overline{DM}$ по базисным запишется так:

$$\overline{AM} = (x - 6)\bar{i} + (y - 0)\bar{j} + (z - 0)\bar{k}$$
$$\overline{BM} = (x - 0)\bar{i} + (y - 8)\bar{j} + (z - 0)\bar{k}$$
$$\overline{CM} = (x - 0)\bar{i} + (y - 0)\bar{j} + (z - 24)\bar{k}$$
$$\overline{DM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

Запишем условие равноудаленности точки *M* от вершины на векторном языке $\overline{AM}^2 = \overline{BM}^2 = \overline{CM}^2 = \overline{DM}^2$ или

$$\begin{cases} \overline{AM}^2 = \overline{DM}^2 \\ \overline{BM}^2 = \overline{DM}^2, \\ \overline{CM}^2 = \overline{DM}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[(x-6)\bar{i}+(y-0)\bar{j}+(z-0)\bar{k}\right]^2 = \left(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}\right)^2, \\ \left[(x-0)\bar{i}+(y-8)\bar{j}+(z-0)\bar{k}\right]^2 = \left(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}\right)^2, \\ \left[(x-0)\bar{i}+(y-0)\bar{j}+(z-24)\bar{k}\right]^2 = \left(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}\right)^2. \end{cases}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{cases} (x-6)^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+z^2, \\ x^2+(y-8)^2+z^2 = x^2+y^2+z^2, \\ x^2+y^2+(z-24)^2 = x^2+y^2+z^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 = x^2, \\ (y-8)^2 = y^2, \\ (z-24)^2 = z^2. \end{cases} \begin{cases} 12x = 36, \\ 16y = 64, \\ 48z = 576. \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 4, \\ z = 12. \end{cases}$$

$$\overline{DM}^2 = 9+16+144 = 169$$

$DM = 13$, Ответ: $DM = 13$

Анализируя решение этой задачи, можно выделить основные компоненты векторного метода решения задач.

1) перевод условия задачи на язык векторов.
2) составление системы векторных уравнений (или одного уравнения);
3) упрощение векторных уравнений;
4) замена векторных уравнений алгебраическими и их решение;
5) объяснение геометрического смысла полученного решения этой системы (или одного уравнения).

Понятийный аппарат, которым должен овладеть ученик, чтобы научиться решать задачи векторным методом.

Для успешного использования векторного метода решения задач, ученик должен усвоить следующие основные понятия: вектор, начало вектора, конец вектора, одинаково направленные векторы, противоположно

направленные векторы, абсолютная величина вектора (модуль вектора), равные векторы, нулевой вектор, проекция вектора на ось, координаты вектора, коллинеарные векторы, неколлинеарные векторы, единичный вектор, координатные векторы (орты), скалярное произведение векторов, угол между ненулевыми векторами.

Кроме того, он должен овладеть основными действиями, умение выполнять которые должно быть сформировано у учащихся: сложение векторов (пользуясь «правилом треугольника», «правилом параллелепипеда»); вычитание векторов, умножение вектора на число; представление вектора в виде суммы, разности двух векторов, в виде произведения векторов, в виде произведения вектора на число; заменять вектор ему равным, используя параллельный перенос; представлять вектор в виде его разложения по двум неколлинеарным векторам; переходить от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и выполнять обратное действие; выражать длины вектора через скалярный квадрат; выражать величину угла между векторами.

Но и этого недостаточно, т. к. кроме перечисленных понятий и навыков учащийся должен овладеть компонентами метода: переводить геометрические термины на язык векторов и решать обратную задачу; переводить условие задачи на язык векторов, т. е. составлять систему векторных уравнений по условию задачи; выбирать базисные векторы, разлагать все введенные в рассмотрение векторы по базисным векторам; упрощать систему векторных уравнений; векторные уравнения заменять алгебраическими.

Основные этапы формирования векторного метода у учащихся.

Формирование векторного метода у учащихся можно разбить на следующие этапы:

а) подготовительный этап – его цель: овладение перечисленными основными понятиями и основными действиями;

б) мотивационный этап – его задача: показать необходимость овладения этим методом и добиться осознания того факты, что на следующих этапах целью их деятельности будет именно усвоение этого метода решения задач. Пример, используемый для этого – решение таких задач, которые векторным методом решаются проще, чем любым другим или другим вообще решить невозможно;

На мотивационном этапе можно рассмотреть с учащимися решение задачи «В трапеции *ABCD* углы *A* и *B* и равны по 90°, а стороны *AB*= 2, *DC*= 1, *AD*= 4. Докажите, что диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны».

Задача решается разными способами и показывается, что векторный метод решения задачи более прост.

Решение задачи векторным методом (рис. 1.4).

$\overline{AC}(1;2), \overline{BD}(4;-2), \overline{AC}\cdot\overline{BD} = a_1b_1 + a_2b_2,$

$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 1\cdot 4 + 2\cdot(-2) = 4 - 4 = 0, \overline{AC}\cdot\overline{BD} = 0,$

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Что и требовалось доказать.

в) ориентировочный этап – разъясняется суть метода и выделяются его основные компоненты на примере анализа решенной этим методом задачи;

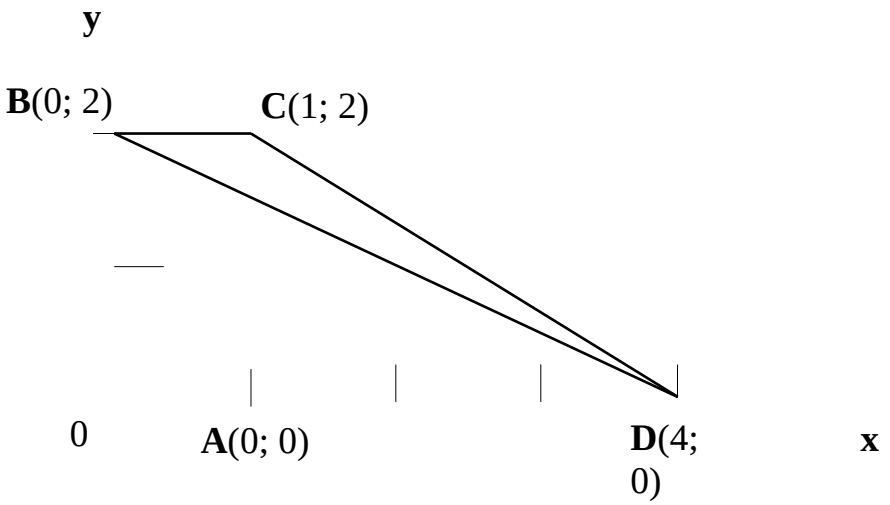


Рис. 1.4. Решение задачи векторным методом

Ориентировочный этап на основе решения данной задачи состоит в следующем:

1) Выясняется, что нужно доказать на геометрическом языке (языке, на котором сформулирована задача)?

   (диагонали взаимно перпендикулярные):

   - Что для этого достаточно доказать на векторном языке? (Скалярное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ равно 0).

   - Какую операцию осуществили? (Перевели требование задачи с геометрического языка на векторный).

2) Есть ли в условии задачи векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ (Нет).

   Каким образом можно получить векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$?

   (Ввести в рассмотрение систему координат, и записать векторы и в координатной форме).

3) Записать скалярное произведение векторов.

4) Выполнить преобразование и получается, что $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$

5) Переводится векторное уравнение на геометрический язык.

   Показывается, как можно формировать выделенные компоненты векторного метода.

   Первое действие, которому необходимо научить учащихся – это перевод геометрических соотношений на векторный язык. Для формирования умения выполнять это действие целесообразно с учащимися решать задачи типа:

1. Точка принадлежит отрезку. Запишите это соотношение в векторной форме $(\overline{BA} = \alpha \cdot \overline{BC}, 0 < \alpha < 1)$.
2. Прочитайте запись на геометрическом языке

   $\overline{AM} = \alpha \overline{AB}$ (Точка *М*принадлежит прямой).

3. Отрезки *AB* и *MK* параллельны. Запишите это соотношение в векторной форме. $(\overline{AB} = \lambda \overline{MK})$.
4. Прямые *AC* и *MP* параллельны. Как записать это соотношение в векторной форме? Есть ли разница в записи решений задач 3 и 4? Почему?
5. Запишите в векторной форме условия перпендикулярности прямых*AB* и *PK*. $(\overline{AB} \cdot \overline{PK} = 0)$

Решение этих и других подобных задач желательно оформить в виде таблицы в кабинете и первое время ею пользоваться при решении задач векторным методом.

г) овладение компонентами метода – используются специально подобранные задачи для формирования отдельных компонентов метода (сначала задачи на формирование одного компонента, потом – двух, трех и т. д.);

д) формирования метода «в целом» - решаются задачи, в которых «работают» все или большинство компонентов метода, в том числе и на материале физики, химии и др. предметов.

Деление формирования метода на этапы здесь условно, так как они тесно взаимосвязаны. Очевидно, не стоит разделять ученикам четко задачи на формирование компонентов, но сам учитель должен четко знать, какой компонент с помощью какой из задач он будет формировать у учащихся. Однако цель каждого этапа должна быть ясна и учителю, и учащимся.

Выводы по 1 главе.

Формирование векторного исчисления началось с работ математиков Древней Греции, синтезирующих алгебраические и геометрические методы решения задач. Уже в то время была очевидна предметная связь со многими разделами физики и астрономии. Дальнейшее развитие понятия вектора получило в трудах Г. Весселя, и связано с его геодезическими изысканиями и геометрической интерпретацией комплексных чисел. Связь развития «многомерных» чисел и моделей, которые бы отражали их структуру дало мощное развитие векторного исчисления в работах Гамильтона, Тета,

Максвелла и Грассмана, которые окончательно сформировали данный раздел в естествознании в конце 19 века.

Анализ теоретических подходов выявил достаточно большое разнообразие в определениях понятия вектора. Это закономерно, так как понятие вектора исторически формировалось в различных областях естествознания. Для реализации тех или иных целей может быть взяты за основу самые различные определения векторного пространства. Фундаментальным определением вектора было и остается его аксиоматическое определение, получившее развитие в работах Вейля. Однако такое введение понятия вектора в школьном курсе сопряжено со значительными трудностями восприятия и недостатком времени. Анализ наиболее распространённых учебных пособий по геометрии, таких как учебные пособия под ред. Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова, А.Д. Александрова, выявил универсальный подход к введению понятия вектора, состоящий в замене математически строгого определения вектора его моделью, которая представляет собой направленный отрезок. Исключением является попытка ряда авторов, определить вектор, как параллельный перенос, который необходимо определять в пространстве. Несмотря на математическую строгость, она не получила достаточно широкого применения в построении курса геометрии отчасти из-за сложности работы с понятием движения в пространстве и проигрыше в наглядности, по сравнению с моделью множества направленных отрезков. Анализ решений задачи векторным методом позволяет выделить в работе основные компоненты векторного метода решения задач. Он состоит в переводе условия задач на язык векторов, составление векторных уравнений и их упрощение, перевод векторных уравнений в алгебраические, их решение и интерпретация смысла полученного решения.

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЙ.

2.1. Основные типы задач, решаемые векторным методом.

Векторы целесообразно применять при решении двух основных типов геометрических задач: *аффинных* и *метрических*.

Задачу называют аффинной, если она не связана с измерением отрезков и углов (прямо или косвенно). В противном случае, задачу называют метрической или евклидовой. Среди них имеются задачи на доказательство и на вычисление, планиметрические и стереометрические.

В задачах с аффинным содержанием обычно требуется установить принадлежность трёх точек одной прямой или четырёх точек одной плоскости, вычислить отношение, в котором точка, принадлежащая отрезку, делит этот отрезок, доказать параллельность отрезков или прямых, сонаправленность или противоположную направленность лучей, параллельность прямых и плоскостей. Реже встречаются задачи на нахождение различных множеств точек. В метрических же задачах преимущественно приходится вычислять расстояния и углы (междупрямыми, прямой и плоскостью, двугранные углы), доказывать перпендикулярность прямых и плоскостей и значительно реже находить и изучать множества точек на плоскости и в пространстве.

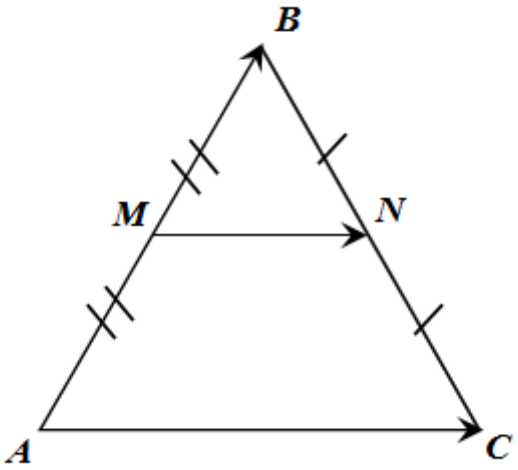
Для решения аффинных задач планиметрии, касающихся взаимного расположения двух прямых, принадлежности трёх точек одной прямой, вычисления отношения коллинеарных отрезков, удобно пользоваться векторами. В процессе решения таких задач необходимо владеть лишь операциями сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число, которые известны из школьного курса.

Если же задача носит метрический характер, то этих операций недостаточно. На помощь приходит обычно операция скалярного

умножения векторов. Посредством этой операции (в сочетании с аффинными операциями) можно вычислять расстояния и углы, находить метрические соотношения между линейными и угловыми элементами многоугольников, описывать различные множества точек, решать ряд задач, связанных с окружностью.

Рассмотрим примеры решения геометрических задач векторным методом.

Задача 1. *Доказать, что средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.*



Решение.

Пусть *MN* – средняя линия *ABC*. Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$. По “правилу треугольника” $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}, \overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BN}$. Так как *M* и *N*– середины сторон *AB* и *BC*, то $\overline{AB} = 2\overline{MB}$, поэтому $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 2\left(\overline{MB} + \overline{BN}\right) = 2\overline{MN}$. Итак, $\overline{AC} = 2\overline{MN}$.

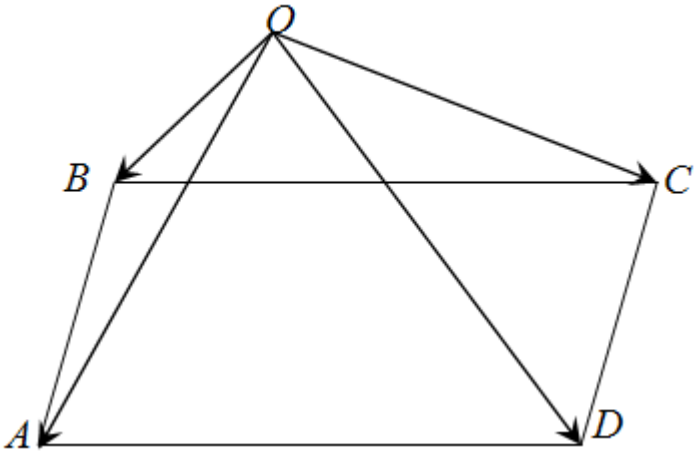
Из этого векторного равенства следует:

а) векторы $\overline{AC}$ и $\overline{MN}$ коллинеарны, значит отрезки *AC*и*MN*параллельны;

в) $\left|\overline{AC}\right| = 2\left|\overline{MN}\right|$или $MN = \frac{1}{2}AC$.

Задача 2. *Дан параллелограмм и произвольная точка О пространства. Доказать, что сумма* $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$, *доказать обратное утверждение, если для некоторого пространственного четырехугольника ABCD и некоторой точки О имеет место данное соотношение* $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$, *то ABCD – параллелограмм.*

Решение.



а) $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$, $\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{OD}-\overline{OC}$

1) $\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$

2) $\overline{OD}-\overline{OC}=\overline{CD}$

3) т.к. *ABCD* – параллелограмм, то $\overline{AB}\parallel\overline{CD}\Rightarrow\ \overline{BA}\parallel\overline{CD}$, то $\overline{BA}\uparrow\uparrow\ \overline{CD}\Rightarrow$ т.к. $\overline{AB}=\overline{CD}\Rightarrow\ \overline{BA}=\overline{CD}\Rightarrow\ \overline{OA}-\overline{OB}=\overline{OD}-\overline{OC}\Rightarrow\ \overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$

б) $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}\Rightarrow$

$\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{OD}-\overline{OC}\Rightarrow$

$\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$; $\overline{OD}-\overline{OC}=\overline{CD}$

или $\overline{OA}-\overline{OD}=\overline{OB}-\overline{OC}\Rightarrow$

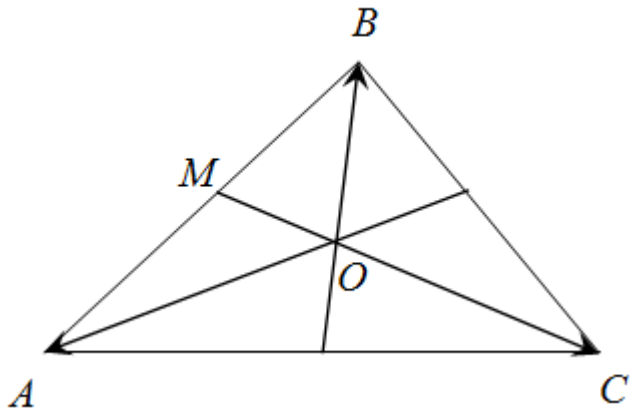
$\overline{OA}-\overline{OD}=\overline{DA}$ и $\overline{OB}-\overline{OC}=\overline{CB}$.

Т.к. 1) $\overline{BA}=\overline{CD}$, то $\overline{BA}=\overline{CD}$, $\overline{BA}\parallel\overline{CD}$,

т.к. 2) $\overline{DA}=\overline{CB}$, то $\overline{DA}=\overline{CB}$, $\overline{DA}\parallel\overline{CB}$

ABCD– параллелограмм.

Задача 3. *В плоскости треугольника ABC найти такую точку O, что* $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$.



Решение.

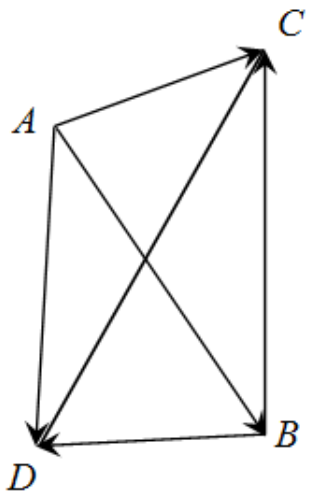
$\overline{OA}+\overline{OB}=2\overline{OM}$,т.к. $\overline{OM}=2\overline{CO}$, $\overline{CO}=2\overline{OM}$

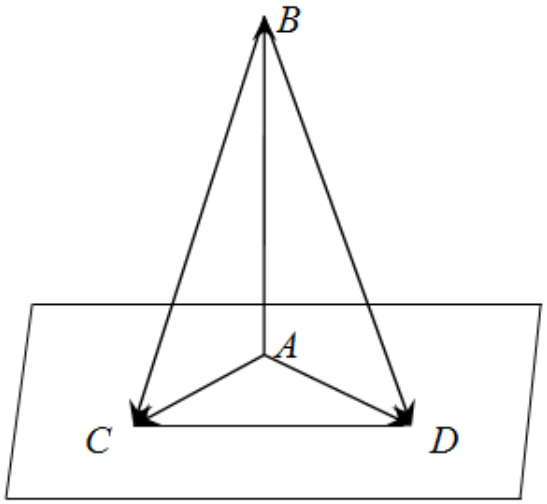
$2\overline{OM}+\overline{CO}=0\left(O\in\overline{MC};\overline{CO}=2\overline{OM}\right)$

точка *O* – точка пересечения медиан ΔABC, т.е. точка *O*– центр тяжести ΔABC.

Задача 4. *Даны два отрезка AB и CD. Доказать, что если* $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$, *то* $\overline{AB}\perp\overline{CD}$. *Верно ли обратное утверждение?*

Решение.





Рассмотрим векторы $\overline{AB},\overline{CD},\overline{AC},\overline{AD},\overline{BD}$ и $\overline{BC}$. В зависимости от их взаимного расположения может получиться плоская или пространственная фигура.

Учитывая, что $\overline{AB^2}=\left|\overline{AB}\right|^2=AB^2$, преобразуем данное равенство следующим образом:

$$\overline{BD^2}-\overline{BC^2}=\overline{AD^2}-\overline{AC^2};\underbrace{\left(\overline{BD}-\overline{BC}\right)}_{\overline{CD}}\left(\overline{BD}+\overline{BC}\right)=\underbrace{\left(\overline{AD}-\overline{AC}\right)}_{\overline{CD}}\left(\overline{AD}+\overline{AC}\right);$$

$$\overline{CD}\cdot\left(\underbrace{\overline{BD}-\overline{AD}}_{-\overline{AB}}+\underbrace{\overline{BC}-\overline{AC}}_{-\overline{AB}}\right)=0;-2\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0;\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0,$$

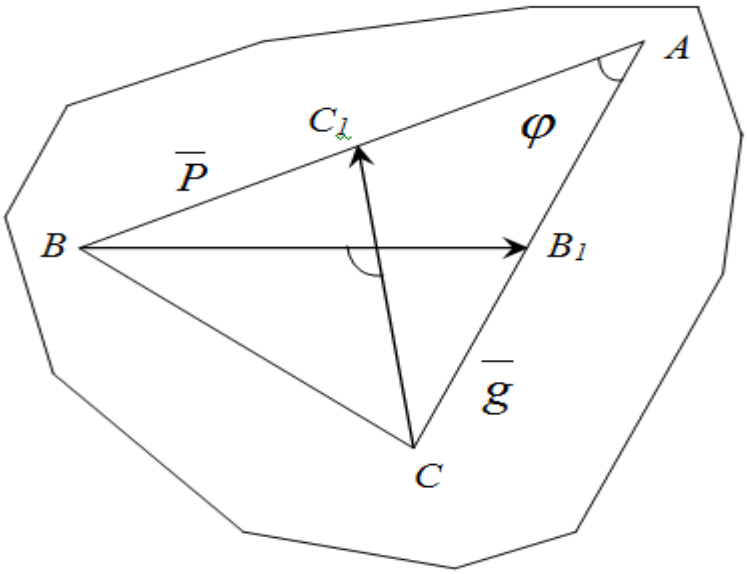
а это и означает, что $\overline{AB}\perp\overline{CD}$.

Выполняя преобразования “от конца к началу”

($\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0,$ или $-2\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0,$ или $\overline{CD}\cdot\left(\overline{BD}+\overline{DA}+\overline{BC}+\overline{CA}\right)=0$ и т.д.), убеждаемся в том, что верно и обратное утверждение.

Задача 5. *В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти угол между боковыми сторонами этого треугольника.*

Решение



Пусть в треугольнике $ABC|AB|=|AC|$. Медианы BB_1 и $|CC_1|$ по условию перпендикулярны, поэтому $\overline{BB_1}\cdot\overline{CC_1}=0.(1)$

Разложим векторы $\overline{BB_1}$ и $\overline{CC_1}$ по векторам $p=\overline{AB}$ и $g=\overline{AC}$.

Имеем: $\overline{BB_1}=\overline{AB_1}-\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{g}-\overline{p},\ \overline{CC_1}=\overline{AC_1}-\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{p}-\overline{g}.$

Из равенства (1) следует:

$$\left(\frac{1}{2}\overline{g}-\overline{p}\right)\left(\frac{1}{2}\overline{p}-\overline{g}\right)=0,\ \frac{1}{4}\overline{g}\,\overline{p}-\frac{1}{2}\overline{g^2}-\frac{1}{2}\overline{p^2}+\overline{p}\cdot\overline{g}=0,$$

$$\frac{5}{4}\overline{p}\,\overline{g}-\frac{1}{2}\overline{g^2}-\frac{1}{2}\overline{p^2}=0.$$

Обозначив $|\overline{p}|=|\overline{g}|=m$ и $(\overline{p},\overline{g})=\varphi$, воспользуемся определением скалярного произведения.

Тогда получим: $\frac{5}{4}m^2\cos\varphi-m^2=0;$ отсюда $\cos\varphi=0,8;\varphi\approx37^\circ.$

Задача 6. *Доказать, что при произвольном выборе точки O равенство* $\overline{OC} = k\overline{OA} + (1 - k)\overline{OB}$ (1) является необходимым и достаточным условием принадлежности различных точек *A, B, C* одной прямой.

Решение.

Достаточность. Пусть выполняется равенство (1).

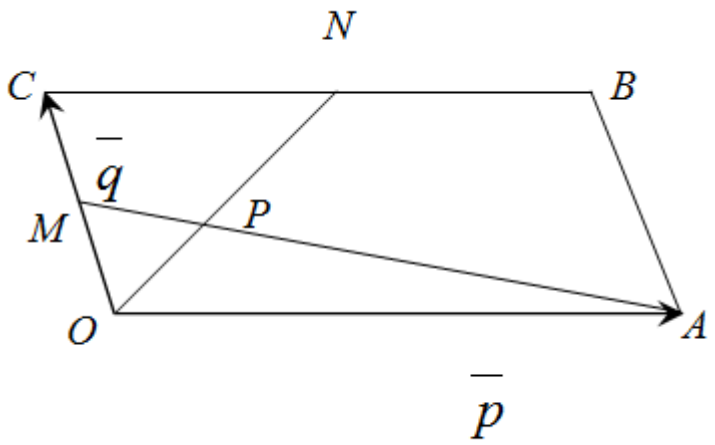
Из него находим, что $\overline{OC} - \overline{OB} = k(\overline{OA} - \overline{OB})$, отсюда по формуле вычитания векторов $\overline{BC} = k\overline{BA}$.

Следовательно, векторы $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$ коллинеарны, а точки *A, B, C* принадлежат одной прямой.

Необходимость. Если точки *A, B, C* принадлежат прямой, то $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$ коллинеарны, поэтому $\overline{BC} = k\overline{BA}$. Применим формулу вычитания векторов:

$\overline{OC} - \overline{OB} = k(\overline{OA} - \overline{OB})$, или $\overline{OC} = k\overline{OA} + (1 - k)\overline{OB}$.

Задача 7. *В параллелограмме OABC точки M и N- середины сторон OC и CB.*



Найти отношение:

$x = |OP| \div |ON|, \qquad P = [ON] \cap [AM];$

где

$y = |AP| \div |AM|.$

Решение.

Пусть $\overline{OA} = \bar{p}$ и $\overline{OC} = \bar{q}$. По условию задачи $\overline{OP} = x\overline{ON} = x\left(\bar{q} + \frac{1}{2}\bar{p}\right)$. Для точек *P*, *M*, *A* применим условие принадлежности трёх точек одной прямой (см. предыдущую задачу).

Тогда получим: $\overline{OP} = k\overline{OM} + (1 - k)\overline{OA} = \frac{k}{2}\bar{q} + (1 - k)\bar{p}.$

Следовательно,

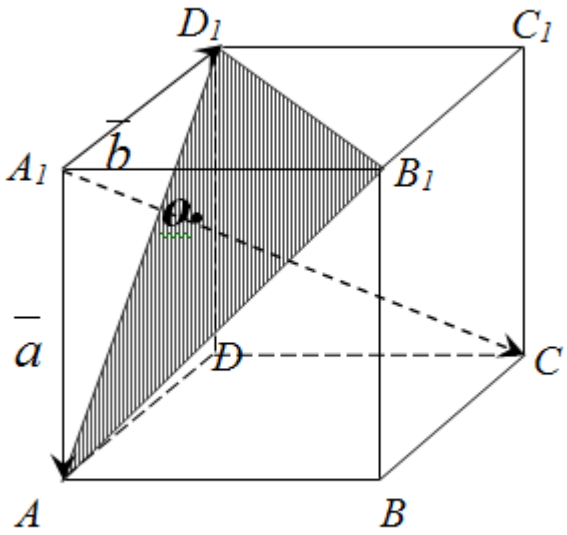
$x\left(\bar{q} + \frac{1}{2}\bar{p}\right) = \frac{k}{2}\bar{q} + (1 - k)\bar{p}$, или $x\bar{q} + \frac{x}{2}\bar{p} = \frac{k}{2}\bar{q} + (1 - k)\bar{p}.$

Пользуясь однозначностью разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, можно записать:

$x = \frac{k}{2}$ и $\frac{x}{2} = 1 - k$. Отсюда $x = \frac{2}{5}$.

Задача 8. *Доказать, что плоскость, проходящая через концы трёх рёбер куба, имеющих общую точку, перпендикулярна диагонали куба, выходящей из этой точки.*

Решение. Рассмотрим в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ A_1C *и сечение* AB_1D_1.



Требуется доказать, что $(A_1C)\perp(AB_1D_1)$.Для этого достаточно установить, что $(A_1C)\perp(AB_1)$, $(A_1C)\perp(AD_1)$. Разложим векторы $\overline{A_1C}$ и $\overline{AB_1}$ по векторам $\overline{A_1A}=\bar{a}$, $\overline{A_1B_1}=\bar{b}$,

$\overline{A_1D_1}=\bar{c}:\overline{A_1C}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c};\overline{AB_1}=\overline{A_1B_1}=\overline{A_1A}=\bar{b}-\bar{a}.$

Тогда $\overline{A_1C}\cdot\overline{AB_1}=(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\cdot(\bar{b}-\bar{a})=\overline{b^2}-\overline{a^2}+\overline{bc}-\overline{ac}.$

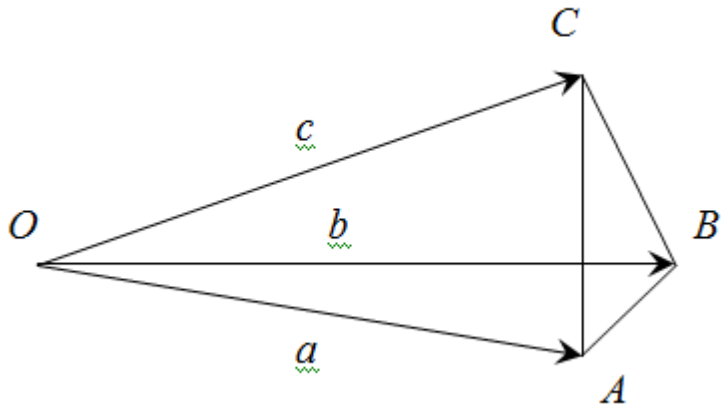
Так как $\bar{b}\perp\bar{c}$ и $\bar{a}\perp\bar{c}$, то $\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{0}$, поэтому

$\overline{A_1C}\cdot\overline{AB_1}=\overline{b^2}-\overline{a^2}=|A_1B_1|^2-|A_1A|^2=0.$

Отсюда: $(A_1C)\perp(AB_1)$. Аналогично доказывается, что $(A_1C)\perp(AD_1)$. Следовательно, $(A_1C)\perp(AB_1D_1)$.

Задача 9. *Доказать, что если в тетраэдре две пары противоположных рёбер взаимно перпендикулярны, то и третья пара рёбер также взаимно перпендикулярна.*

Доказательство. Пусть $OABC$ – данный тетраэдр, у которого $OA\perp CB$ и $OB\perp AC$.



Требуется доказать, что $OC \perp AB$. Для решения задачи введём в рассмотрение векторы $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$ и $\overline{OC} = \bar{c}$ и запишем данные условия, используя скалярное произведение векторов. Так как $OA \perp CB$, то $\overline{OA} \cdot \overline{CB} = 0$ или $\bar{a}(\bar{b} - \bar{c}) = 0$. Так как $OB \perp AC$, то $\overline{OB} \cdot \overline{AC} = 0$ или $\bar{b}(\bar{c} - \bar{a}) = 0$. Сложив эти два соотношения, получаем $\bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{b} = \bar{0}$, $\bar{c}(\bar{b} - \bar{a}) = \bar{0}$, т.е. $\overline{OC} \cdot \overline{AB} = \bar{0}$. Отсюда следует, что прямые OC и AB взаимно перпендикулярны.

Задача 10.(Теорема косинусов) *Доказать, что для любого треугольника ABC имеет место соотношение:*

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\varphi$, *где* $\varphi = \angle BAC$.

Решение. Введём обозначения: $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{AC} = \bar{b}$, $\overline{BC} = \bar{a}$. Очевидно, $\bar{b} - \bar{c} = \bar{a}$. Отсюда $(\bar{b} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{a}\bar{a}$, или $\bar{b}\bar{b} - 2\bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{c} = \bar{a}\bar{a}$.

Используя геометрический смысл скалярного произведения (Скалярное произведение векторов равно произведению модулей данных векторов на косинус угла, образованного данными векторами.), получаем искомый результат.

Следствием этой задачи являются прямая и обратная теорема Пифагора: *для того чтобы треугольник ABC был прямоугольным с*

прямым углом при вершине A, необходимо и достаточно, чтобы $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Скалярное произведение векторов равно произведению модулей данных векторов на косинус угла, образованного данными векторами.

Задача 11. *В треугольнике ABC вычислить длину медианы* m_a*, зная угол A и две стороны AB=c, AC=b.*

Решение. Пусть *M*– середина стороны *BC* треугольника *ABC*. Согласно теореме “Основные свойства скалярного произведения векторов”.

Для произвольных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и любого числа δ имеем:

а) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$;

б) $(\delta\bar{a})\bar{b} = \delta(\bar{a}\bar{b}), \bar{a}(\delta\bar{b}) = \delta(\bar{a}\bar{b})$;

в) $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}, (\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$;

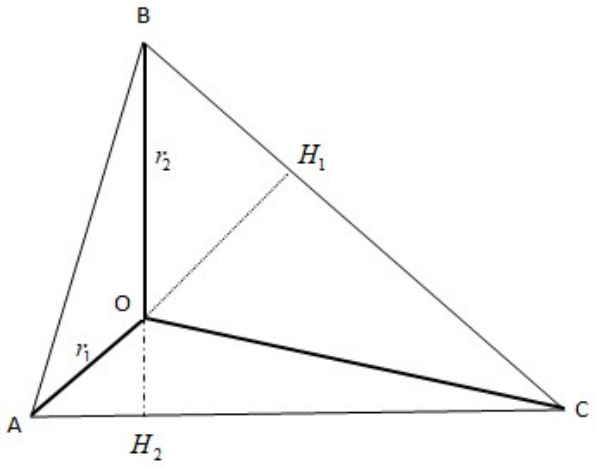
г) $\bar{a}\bar{a} = |a|^2$.

д) имеем: $m_a = \sqrt{\overline{AM}\cdot\overline{AM}}$. Согласно лемме: “Если *ABC* – произвольный треугольник, а *M* – середина стороны” BC, то $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$. Имеем: $\overline{AM} = \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}$, где $\bar{c} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AC}$. Подставив это значение в предыдущее соотношение, получаем:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{b}+\bar{c})(\bar{b}+\bar{c})} = \frac{1}{2}\sqrt{\bar{b}\bar{b} + \bar{c}\bar{c} + 2\bar{b}\bar{c}} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cdot\cos A}.$$

Задача 12. Доказать, что высоты любого треугольника имеют одну общую точку.

Решение. Пусть ABC – данный треугольник, O – точка пересечения двух высот AH_1 и BH_2.



Если обозначить через r_1, r_2 и r_3 соответственно векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, то $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = 0$ и $\overline{OB} \cdot \overline{CA} = 0$, поэтому $r_1(r_3 - r_2) = 0$ и $r_2(r_1 - r_3) = 0$.

Воспользуемся следующим тождеством, в справедливости которого легко убедиться, если раскрыть скобки:

$(r_2 - r_1)r_3 + (r_3 - r_2)r_1 + (r_1 - r_3)r_2 = 0$.

Учитывая предыдущие соотношения, получаем:

$(r_2 - r_1)r_3 = 0$ или $\overline{BA} \cdot \overline{OC} = 0$. Отсюда следует, что $\overline{OC}$ - высота треугольника ABC.

2.2. Доказательство алгебраических и геометрических неравенств, с применением скалярного произведения.

При решении и исследовании многих задач арифметики, алгебры, анализа и геометрии приходится непосредственно или косвенно рассматривать неравенства и системы неравенств, применять свойства неравенств. Помимо известных приёмов решения задач на неравенства, в основе которых лежит теорема Коши, можно предложить дополнительно ещё неравенства, связанные со скалярным произведением:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} > 0 \text{ при } \bar{a} \neq \bar{0}, \quad (1)$$

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})^2 - \bar{a}^2\bar{b}^2 \le 0, \quad (2)$$

Причём в (2) знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы (т.е. коллинеарны).

Более подробно: если $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$; если $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b} = -|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$.

Эти два неравенства позволяют доказать известные неравенства и открывают путь для получения новых неравенств, не рассматривавшихся в школьной учебной литературе.

Ниже будут приведены решения геометрических и алгебраических задач на неравенства посредством формул (1) и (2).

Задача 1. Доказать, что для каждого треугольника ABC выполняется неравенство $R \ge 2r$*, где R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности.*

Решение. Пусть O – центр описанной окружности, I – центр вписанной окружности. Тогда, как известно,

$$\overline{OI} = \frac{a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC}}{a+b+c},$$

где $a = |BC|, b = |CA|, c = |AB|$.

Следовательно, $(a\cdot\overline{OA} + b\cdot\overline{OB} + c\cdot\overline{OC})^2 \ge 0$, причём знак равенства имеет место только для равностороннего треугольника. Далее имеем:

$$(a^2+b^2+c^2)R^2 + 2(ab\cos 2C + bc\cos 2A + ca\cos 2B)R^2 \ge 0.$$

Но $\cos 2A = 1 - \frac{a^2}{2R^2}, \cos 2B = 1 - \frac{b^2}{2R^2}, \cos 2C = 1 - \frac{c^2}{2R^2},$ поэтому

$$a^2+b^2+c^2 + 2bc\left(1 - \frac{a^2}{2R^2}\right) + 2ca\left(1 - \frac{b^2}{2R^2}\right) + 2ab\left(1 - \frac{c^2}{2R^2}\right) \ge 0.$$

После упрощений получаем:

$(a+b+c)^2 - \frac{1}{R^2}abc(a+b+c) \geq 0$.

Сократив на $a+b+c$ и положив $a+b+c=2p, abc=4RS, S=pr$.

Найдём: $2p - \frac{1}{R^2} \cdot 4R \cdot p \cdot r \geq 0$ или $R \geq 2r$.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций $f(x)=3\sin x+4\cos x$

Решение. Рассмотри два вектора:

$\bar{a}=\{3;4\}, \bar{b}=\{\sin x;\cos x\}$.

Согласно неравенству (2)

$-|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \leq \bar{a} \cdot \bar{b} \leq |\bar{a}||\bar{b}|$, где $|\bar{a}|=5, |\bar{b}|=1.$

Имеем $-5 \leq 3\sin x+4\cos x \leq 5.$

Задача 3. Даны четыре точки A, B, C и D. Доказать, что $|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 \geq |AC|^2+|BD|^2$.

Решение. Пусть *M* – середина отрезка *AB*, *N* – середина отрезка *CD*.

Тогда $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OC}-\overline{OB}-\overline{OD}).$

Отсюда $(\overline{OA}+\overline{OC}-\overline{OB}-\overline{OD})^2 \geq 0,$ причём знак равенства имеет место только тогда, когда M=N, т.е. когда ABCD – параллелограмм.

Имеем:

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2-|AC|^2-|BD|^2=$$
$$=(\overline{OB}-\overline{OA})^2+(\overline{OC}-\overline{OB})^2+(\overline{OD}-\overline{OC})^2+(\overline{OA}-\overline{OD})^2-$$
$$-(\overline{OC}-\overline{OA})^2-(\overline{OD}-\overline{OB})^2=\overline{OA^2}+\overline{OB^2}+\overline{OC^2}+\overline{OD^2}-$$
$$-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}-2\overline{OC}\cdot\overline{OB}-2\overline{OD}\cdot\overline{OC}-2\overline{OA}\cdot\overline{OD}+2\overline{OC}\cdot\overline{OA}+$$
$$+2\overline{OD}\cdot\overline{OB}=(\overline{OA}+\overline{OC}-\overline{OB}-\overline{OD})^2\geq 0.$$

2.3. Тестовые задания по переводу геометрического содержания задачи на векторный язык

Практика показывает, что в процессе решения задачи векторным методом самым трудным для учащихся является умение делать перевод геометрического факта на язык векторов и осуществлять обратный переход.

Для овладения учащимися векторным методом решения геометрических задач важно научиться делать перевод геометрического факта на язык векторов и обратный перевод, т.е. получение геометрической интерпретации векторного выражения.

Чтобы сформировать у учеников умение переводить текст задачи на векторный язык, следует отработать сначала перевод отдельных элементов текста задачи и их связей на векторный язык, а уж затем чтение векторных соотношений. Для выработки отмеченных навыков целесообразно использовать тестовые задания, позволяющие переводить основные геометрические понятия на язык векторов и находить геометрические интерпретации векторных выражений. Создание такого тестового «словаря» систематизирует знания учеников по векторной алгебре, помогает правильно выбрать векторы, которые удобно использовать для решения задачи, а также помогает записать условие задачи с помощью выбранных векторов и сделать соответствующие выводы и обобщения по мере выявления зависимости между ними. Составление перечня заданий в таком тестовом «словаре» целесообразно начинать с первых уроков знакомства учащихся с векторами.

По мере изучения теории и в процессе решения задач появляются новые векторные соотношения, которые постепенно включаются в «словарь». Формулы перевода основных геометрических соотношений на векторный язык удобно оформлять для общего пользования учащимися в виде таблиц, и употреблять при тестировании как можно чаще.

Следует помнить, что:

аффинные свойства фигур могут быть выражены на языке векторов посредством линейных операций над векторами, а в некоторых случаях и с помощью скалярного произведения. Например, если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ сонаправлены, то $\overline{AB} = k\overline{CD}$, где $k > 0$. С другой стороны, можно воспользоваться и скалярным произведением: $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{CD}\right|$ или $\overline{AD^2} + \overline{BC^2} = \overline{AC^2} + \overline{BD^2} + 2\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{CD}\right|$. Аналогично, если ABCD – параллелограмм, то $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$ или $\overline{AC^2} + \overline{BD^2} = 2\overline{AB^2} + 2\overline{AD^2}$. В случае же, когда свойство фигуры метрическое, оно выражается непременно через скалярное произведение; одних аффинных понятий для выражения этих свойств недостаточно. Поэтому в приводимом ниже тестовом «словаре» имеются три раздела:

а) аффинные свойства, записанные на языке линейных операций (1-11); б) метрические свойства (12-20*, 24*-28*); в) аффинные свойства, выраженные на языке скалярного произведения с привлечением линейных операций (21-23*).

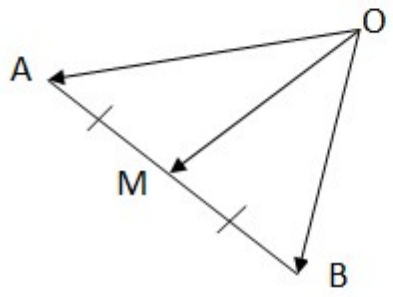
*Звёздочкой отмечены дополнения к основным записям, реже применяемые и предназначенные для работы с наиболее успевающими учениками.

1. а) Для любых трёх точек A, B, C имеем $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

б) Для любых точек A, B и произвольной точки O имеем: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

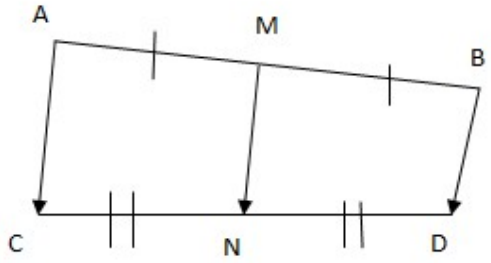
2. а) Если M – середина отрезка AB, то для любой точки O справедливо равенство:

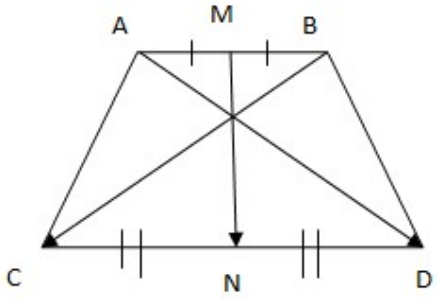
$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$.



б) Если равенство $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$ *справедливо для какой-либо точки O, то M – середина отрезка AB.*

2. Если M и N – середины отрезков AB и CD, то справедливы равенства* $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$ *и* $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$.

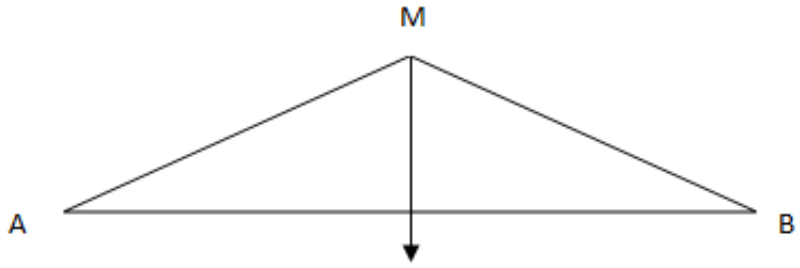




3. Точки M и M_1 *тогда и только тогда симметричны относительно точки O, когда* $\overline{OM} = -\overline{OM_1}$.

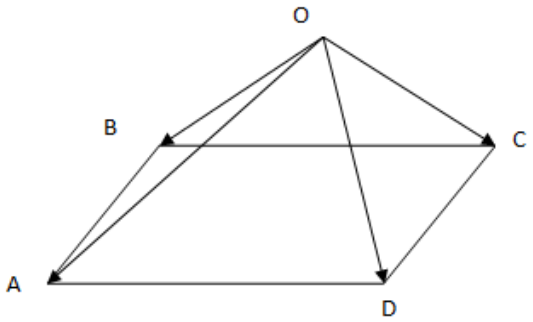


3. Если точки M и M_1 симметричны относительно середины отрезка AB, то* $\overline{MM_1} = \overline{MA} + \overline{MB}$



4. Точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda (\lambda \neq -1)$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{OC} = \dfrac{\overline{OA} + \lambda \overline{OB}}{1 + \lambda}$.

5. Четырёхугольник ABCD в том и только в том случае будет параллелограммом, если выполнено одно (любое) из следующих условий:



а) $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$; *б)* $\overline{AB} = \overline{DC}$;

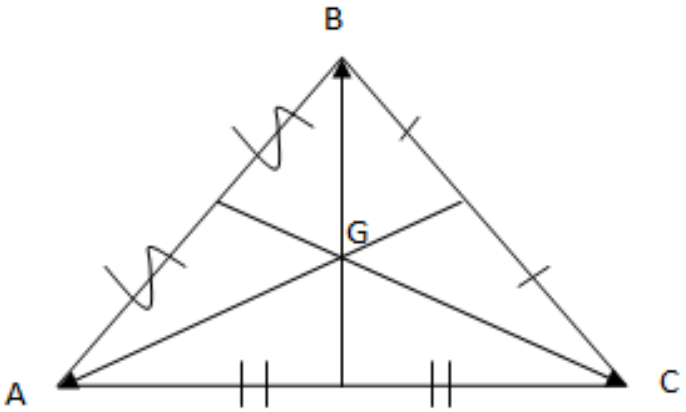
в) $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$ *(O – произвольная точка).*

6. Точка G в том и только в том случае является точкой пересечения медиан треугольника ABC, если:

а) $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{CA} = \bar{0}$;

б) $\overline{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right)$,

где O – произвольная точка.



7. Прямые AB и CD параллельны тогда и только тогда, когда $\overline{AB} = k\overline{CD}$*, где* $k \neq 0$.

8. Точка M принадлежит прямойOA тогда и только тогда, когда $\overline{OM} = k\overline{OA}$

.

8. Если* $\bar{a}$ *- направляющий вектор прямой* ι *и* $A \in \iota$*, то:*

а) для любой точки $P \in \iota$ *и любой точки O (не обязательно принадлежащей прямой* ι*) имеет место равенство* $\overline{OP} = \overline{OA} + k\bar{a}$*;*

б) для любой точки $P \in \iota$ *справедливо равенство* $\overline{AP} = \overline{ka}$*; при этом число k однозначно определяется точкой P.*

9. Множество точек C, для которых $\overline{OC} = k\overline{OA} + (1 - k)\overline{OB}$ *(где* $A \neq B$*), есть отрезок ABпри* $0 \leq k \leq 1$*, луч BA при* $k > 0$*, луч AB при* $k < 1$.

9. 1) Если* π *- полуплоскость с границей (AB) и O – любая точка этой полуплоскости, не принадлежащая (AB), то*

$$\pi = \left\{ M \div \overline{AM} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AO}, \beta \geq 0 \right\}$$

2) Если σ *- полоса, определяемая парой параллельных прямых AB и CD, то*

$$\sigma = \left\{ M \div \overline{AM} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AO}, 0 \leq \beta \leq 1 \right\}.$$

10. Если $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *- неколлинеарные векторы, параллельные плоскости* $\sigma, A \in \sigma$ *, то для любой точки* $P \in \sigma$ *имеем* $\overline{AP} = k\bar{a} + l\bar{b}$*, где k, l – числа, однозначно*

определяемые точкой P. Обратно, если выполнено равенство $\overline{AP} = \overline{ka} + \overline{lb}$, *то* $P \in \sigma$.

10. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то точка D тогда и только тогда принадлежит плоскости ABC, когда*

$\overline{OD} = p\overline{OA} + q\overline{OB} + (1 - p - q)\overline{OC}$ *(точка O – произвольная).*

11. *Если* $H_A^k(X) = Y$, *где* H_A^k*-гомотетия с центром A и коэффициентом k, то* $\overline{AY} = k\overline{AX}$.

11.* *1) Если* $H_A^k(X_1) = Y_1$, $H_A^k(X_2) = Y_2$, *то* $\overline{Y_1Y_2} = k\overline{X_1X_2}$.

2) *Если* $H_A^k(X) = Y$, *то* $\overline{OY} = (1 - k)\overline{OA} + k\overline{OX}$, *где O - произвольная точка.*

3) *Композиция двух гомотетий* H_A^k *и* H_B^l *при* $kl \neq 1$ *есть гомотетия* H_C^{kl}, *где точка C определяется равенством* $\overline{OC} = \frac{(1 - l)\overline{OB} + l(1 - k)\overline{OA}}{1 - kl}$ *(для любой точки O). Если* $A \neq B$, *то точка C делит отрезок AB в отношении* $\frac{1 - l}{l(1 - k)}$, *которое зависит только от коэффициентов гомотетий, но не зависит от центров гомотетий.*

12. *Если* $|AB| = m$, *то*

а) $\overline{AB^2} = m^2$;

б)* $(\overline{OB} - \overline{OA})^2 = m^2$, *где O - любая точка.*

13. *Если* $|AB| = |CD|$, *то*

а) $\overline{AB^2} = \overline{CD^2}$;

б)* $(\overline{OB} - \overline{OA})^2 = (\overline{OD} - \overline{OC})^2$, *где O - произвольная точка.*

14. *Для любых двух векторов* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *имеем* $(\bar{a} \cdot \bar{b})^2 \leq \overline{a^2 b^2}$.

15. *Треугольник ABC - прямоугольный (* $A = 90^\circ$*), если*

а) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$;

б)* $\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{AB^2}=0$.

16. *Треугольник ABC -равнобедренный* $(|AC|=|BC|)$*, если выполнено какое-либо из следующих условий:*

а) $\overline{AC^2}=\overline{BC^2}$;

б)* $\overline{AB^2}=2\overline{AB}\cdot\overline{AC}$;

в)* $(\overline{CA}+\overline{CB})\cdot(\overline{CA}+-\overline{CB})=0$.

17. *Треугольник ABC -остроугольный, если одновременно выполняются неравенства* $\overline{AB}\cdot\overline{AC}>0,\ \overline{BA}\cdot\overline{BC}>0$ *и* $\overline{CA}\cdot\overline{CB}>0$.

18. *Треугольник ABC - тупоугольный, если либо* $\overline{AB}\cdot\overline{AC}<0$, *либо* $\overline{BA}\cdot\overline{BC}<0$, *либо* $\overline{CA}\cdot\overline{CB}<0$.

19. *Для любых трех точек A, B, C имеем:*

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\left(|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2\right).$$

19.* *Для любых четырёх точек A, B, C, D имеем:*

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}\left(|AD|^2+|BC|^2-|AC|^2-|BD|^2\right).$$

20. *Если* $\bar{e}$ *- единичный вектор, то* $\bar{a}\cdot\bar{e}$ *есть проекция вектора* $\bar{a}$ *на ось с направляющим вектором* $\bar{e}$.

20.* *Если* $\bar{e}$ *- направляющий единичный вектор прямой p, то составляющая* $\bar{a}_p$ *вектора* $\bar{a}$ *на прямой p вычисляется по формуле* $\bar{a}_p=(\bar{a}\cdot\bar{e})\bar{e}$.

21. *Векторы* $\overline{AB}$ *и* $\overline{CD}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда выполнено одно (любое) из следующих условий:*

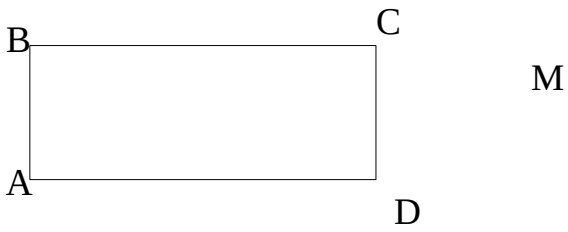
а) $|\overline{AB}\cdot\overline{CD}|=|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|$;

б)* $|\overline{AB}\cdot\overline{CD}|=\frac{1}{2}\left(|\overline{AD}|^2+|\overline{BC}|^2-|\overline{AC}|^2-|\overline{BD}|^2\right)$;

в)* $(\overline{AB}-\overline{CD})\cdot\left(|\overline{CD}|\overline{AB}+|\overline{AB}|\overline{CD}\right)=0$.

22. *Четырёхугольник ABCD - трапеция* $([AD]\parallel[BC])$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\left|\overline{AD}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|$.

22.* 1) *Четырёхугольник ABCD - прямоугольник тогда и только тогда, когда для любой точки M выполняется*



а) $\overline{MA}\cdot\overline{MC}=\overline{MB}\cdot\overline{MD}$ или

б) $\overline{MA^2}+\overline{MC^2}=\overline{MB^2}\cdot\overline{MD^2}$.

2) *Четырёхугольник ABCD - параллелограмм тогда и только тогда, когда* $\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BA}\cdot\overline{BC}+\overline{CB}\cdot\overline{CD}+\overline{DC}\cdot\overline{DA}=0$.

23. *Точка M - середина отрезка AB тогда и только тогда, когда*

$$\overline{OM^2}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA^2}+\overline{OB^2}\right)-\frac{1}{4}\overline{AB^2}$$

(O - произвольная точка).

23.* *Точка G - точка пересечения медиан треугольника ABC тогда и только тогда, когда выполняется одно (любое) из следующих условий:*

а) $\overline{OA^2}+\overline{OB^2}+\overline{OC^2}=\overline{GA^2}+\overline{GB^2}+\overline{GC^2}+3\overline{OG^2}$

(O - произвольная точка);

б) $\left|\overline{AB}\right|^2+\left|\overline{BC}\right|^2+\left|\overline{CA}\right|^2=3\left(\left|\overline{GA}\right|^2+\left|\overline{GB}\right|^2+\left|\overline{GC}\right|^2\right)$.

24.* *Точка H тогда и только тогда является точкой пересечения высот треугольника ABC, когда выполнено одно (любое) из следующих условий:*

а) $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$, *где O - центр описанной окружности около треугольника ABC;*

б) $\overline{HA}\cdot\overline{HB}=\overline{HC}\cdot\overline{HA}=\overline{HB}\cdot\overline{HC}$;

в) $\overline{HA}\,tg\angle A+\overline{HB}\,tg\angle B+\overline{HC}\,tg\angle C=\overline{0}$

25.**Если O– центр описанной около треугольника окружности, то* $\sin 2\hat{A}\cdot\overline{OA}+\sin 2\hat{B}\cdot\overline{OB}+\sin 2\hat{C}\cdot\overline{OC}=\bar{0}$.

26.**Если I – центр вписанной в треугольник окружности, то выполняется одно (любое) из равенств:*

а) $a\overline{IA}+b\overline{IB}+c\overline{IC}=\bar{0}$,

б) $\overline{OI}=\dfrac{a\overline{OA}+b\overline{OB}+c\overline{OC}}{a+b+c}$

где O - произвольная точка.

27. *Треугольник ABC – равносторонний тогда и только тогда, когда* $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}$, *гдеO– центр описанной (вписанной) окружности.*

28. *Если H – точка пересечения высот ортоцентрического тетраэдра ABCD, то* $\overline{OH}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}\right)$, *гдеO– центр описаннойсферы. (Тетраэдр называется ортоцентрическим, если его высоты пересекаются в одной точке).*

Опыт показывает, что учащиеся лучше переводят геометрические факты на язык векторов, чем дают геометрическую интерпретацию полученной векторной записи, поэтому в процессе работы следует обращать внимание учащихся на то, что запись одного и того же геометрического факта неоднозначна.

Приведём две задачи на выработку навыка геометрической интерпретации векторных соотношений.

Задача 1. *Дать геометрическую интерпретацию векторных выражений:*

а) $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)^2+\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2=2\overline{a^2}+2\overline{b^2}$;

б) $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)^2-\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2=4\bar{a}\cdot\bar{b}$;

в) $\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right)^2=3\left(\overline{a^2}+\overline{b^2}+\overline{c^2}\right)-\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2-\left(\bar{b}-\bar{c}\right)^2-\left(\bar{c}-\bar{a}\right)^2$;

г) $\left(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}-\bar{d}\right)^2=\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2+\left(\bar{b}-\bar{c}\right)^2+\left(\bar{c}-\bar{d}\right)^2+\left(\bar{d}-\bar{a}\right)^2-\left(\bar{a}-\bar{c}\right)^2-\left(\bar{b}-\bar{d}\right)^2$;

д) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2=(\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{b}+\bar{c})^2+(\bar{c}+\bar{a})^2-\overline{a^2}-\overline{b^2}-\overline{c^2}$.

Решение. Рассмотрим параллелограмм *ABCD*, для которого $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$. Имеем $\overline{AC}=\bar{a}+\bar{b}$, $\overline{BD}=\bar{b}-\bar{a}$. При этих обозначениях можно дать следующую интерпретацию записанных равенств.

а) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

б) Разность квадратов диагоналей параллелограмма равна учетверенному произведению его смежных сторон на косинус угла между ними.

в) Рассматриваемое векторное соотношение можно записать в виде

$$\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}\left(\overline{a^2}+\overline{b^2}+\overline{c^2}\right)-\frac{1}{9}\left[(\bar{a}-\bar{b})^2+(\bar{b}-\bar{c})^2+(\bar{c}-\bar{a})^2\right].$$

Отложим векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ от некоторой точки О, т.е. $\bar{a}=\overline{OA}$, $\bar{b}=\overline{OB}$, $\bar{c}=\overline{OC}$, и рассмотрим треугольник *ABC*. Видим, что $\overline{OG}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$, где *G* - точка пересечения медиан треугольника *ABC*. Так как $\overline{AB}=\bar{b}-\bar{a}, \overline{BC}=\bar{c}-\bar{b}$, $\overline{AC}=\bar{c}-\bar{a}$, то рассматриваемому равенству можно дать следующую геометрическую интерпретацию: квадрат расстояния любой точки пространства до точки пересечения медиан треугольника равен одной третьей суммы квадратов расстояний этой точки до вершин треугольника без одной девятой суммы квадратов длин сторон треугольника. Если взять тетраэдр *OABC*, у которого $\overline{OA}=\bar{a}, \overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{c}$, то $\overline{OG}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$, где *G* – центроид треугольника *ABC*, и мы получаем такую интерпретацию: квадрат медианы *OG* тетраэдра равен одной третьей суммы квадратов ребер тетраэдра, сходящихся к вершине *O*, без одной девятой суммы квадратов длин сторон противолежащей грани.

г) Чтобы дать геометрическую интерпретацию этого векторного выражения, рассмотрим тетраэдр *ABCD*. Обозначим $\overline{OA}=\bar{a},\overline{OB}=\bar{b},\ \overline{OC}=\bar{c},\ \overline{OD}=\bar{d}$, тогда $\overline{BA}=\bar{a}-\bar{b},\overline{CB}=\bar{b}-\bar{a},\overline{DC}=\bar{c}-\bar{d},\ \overline{AD}=\bar{d}-\bar{a},\overline{CA}=\bar{a}-\bar{c},\overline{DB}=\bar{b}-\bar{a}$.

Отсюда:

$$\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}-\bar{d}=(\bar{a}+\bar{c})-(\bar{b}+\bar{d})=2\cdot\frac{\bar{a}+\bar{c}}{2}-2\cdot\frac{\bar{b}+\bar{d}}{2}=2(\overline{OP}-\overline{OQ})=2\overline{QP},$$

где *P, Q* – середины отрезков *AC, BD*соответственно. Векторное тождество показывает, что учетверённый квадрат расстояния между серединами двух противоположных ребер тетраэдра равен сумме квадратов длин остальных рёбер без суммы квадратов длин рассматриваемых противоположных рёбер.

Аналогично можно сформулировать эту теорему применительно к четырёхугольнику: учетверённый квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей четырёхугольника, равен сумме квадратов всех его сторон без суммы квадратов его диагоналей.

д) Рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах $\overline{OA}=\bar{a},\overline{OB}=\bar{b},\overline{OC}=\bar{c}$, тогда имеем: квадрат длины диагонали параллелепипеда равен сумме квадратов длин диагоналей его граней *OAB, OBC, OCA* без суммы квадратов ребер, исходящих из вершины О. Это векторное равенство можно также получить и путём упрощения равенства в), а их геометрические интерпретации, как видим, различны.

Задача. *Определить вид треугольника ABC,для которого выполняется условие* $|BC|\cdot\overline{GA}+|AC|\cdot\overline{GB}+|AB|\cdot\overline{GC}=\bar{0}$, где *G*– точка пересечения медиан треугольника.

Решение. Из равенства $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\bar{0}$ следует, что $\overline{GC}=-\overline{GA}-\overline{GB}$. Тогда

$$|BC|\cdot\overline{GA}+|AC|\cdot\overline{GB}+|AB|\cdot(-\overline{GA}-\overline{GB})=\bar{0},$$

$$(|BC|-|AB|)\cdot\overline{GA}+(|AC|-|AB|)\cdot\overline{GB}=\bar{0}.$$

Но векторы $\overline{GA}$ и $\overline{GB}$ неколлинеарны, следовательно,

$$\begin{cases} |BC| - |AB| = 0, \\ |AC| - |AB| = 0. \end{cases}$$

Из полученной системы находим, что

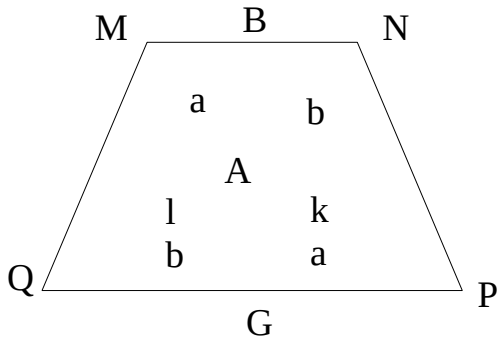
$|AB| = |BC| = |AC|$.

Итак, данное равенство выполняется только для равностороннего треугольника.

Проанализировав ход решения задач 1 и 2, отметим, что важен не просто поэлементный перевод условия задачи на язык векторов; в зависимости от ситуации, от содержания задачи одни и те же слова переводятся на векторный язык разными средствами. Задачи на выработку геометрической интерпретации векторных выражений способствуют более глубокому пониманию изучаемого материала, активизируют деятельность учащихся по применению полученных знаний.

Приведём пример решения задачи с помощью изложенного «словаря».

Задача. *Если точка A пересечения диагоналей четырехугольника MNPQи средины B,C его противоположных сторон MNиPQ лежат на одной прямой, то MNPQ – трапеция или параллелограмм.*



Решение: положим $\overline{AM} = \bar{a}, \overline{AN} = \bar{b}$. Тогда $\overline{AP} = \overline{ka}$ и $\overline{AQ} = \overline{lb}$. Так как B - середина отрезка MN, то:

$$\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AM} + \frac{1}{2}\overline{AN} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b}). \quad (2)$$

Аналогично,

$$\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AP} + \frac{1}{2}\overline{AQ} = \frac{1}{2}(\overline{ka} + \overline{lb}).$$

По условию точки A, B, C лежат на одной прямой, и поэтому, существует такое число m, что:

$\overline{AC} = m\overline{AP}$, (8) т.е. $\frac{m}{2}(\bar{a} + \bar{b}) = \frac{1}{2}(\overline{ka} + \overline{lb})$,

или $\frac{m - k}{2}\bar{a} + \frac{m - l}{2}\bar{b} = \bar{0}$.

Откуда следует, что m = k = l.

Тогда: $\overline{MN} = \bar{b} - \bar{a}$, $\overline{PQ} = \overline{lb} - \overline{ka} = -k(\bar{a} - \bar{b})$,

т.е. $\overline{PQ} = k\overline{MN}$ (7). Следовательно, $PQ \parallel MN$, т.е. MNPQ - трапеция или параллелограмм.

Выводы по второй главе.

Самое трудное для учащихся – это научиться делать перевод геометрического факта на язык векторов и обратный перевод. Для овладения учащимися векторным методом решения геометрических задач важно научиться делать перевод геометрического факта на язык векторов и обратный перевод, т.е. получение геометрической интерпретации векторного выражения.

ГЛАВА 3. ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

3.1. Задачи на нахождение угла, решаемые векторным методом в открытых банках заданий.

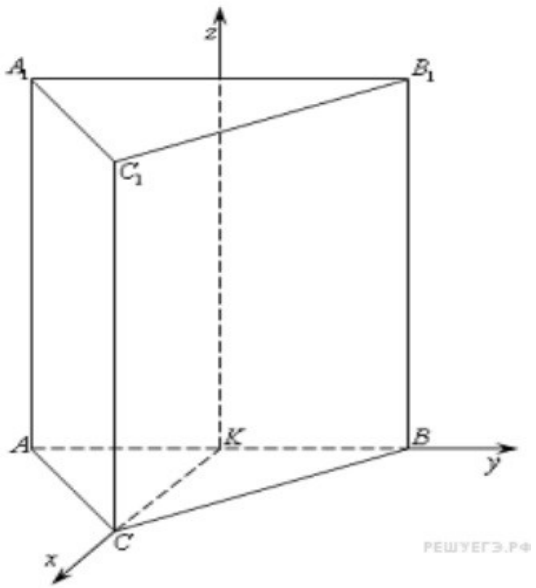
В настоящее время подготовка к итоговой аттестации тесно сопряжена с разбором основных типов задач изучаемой темы в открытых банках задач. Одним из наиболее известных, является портал https://ege.sdamgia.ru/. Основной задачей, решаемой в данном разделе, является анализ задач, указанного портала, в решении которых использован векторный метод.

Задачи на нахождение угла между прямыми.

Задания Д7 С2 № 505845

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой равны a Найдите угол между прямыми A_1B и AC_1, если сумма длин всех сторон обоих оснований равна AA_1.

Решение. Введем прямоугольную декартову систему координат, поместив ее начало в K - середину AB, и направив оси ox, oy через вершины C и B соответственно.



Получаем: $CK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AA_1=6a$, $AK=BK$.

С учетом этих условий, координаты вершин будут иметь вид:

$$A\left(0,-\frac{a}{2},0\right),\ B\left(0,\frac{a}{2},0\right),\ C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2},0,0\right),\ A_1\left(0,-\frac{a}{2},6a\right),\ C_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2},0,6a\right)$$

Найдем координаты направляющих векторов прямых:

$$\overline{A_1B}=\{0,a,-6a\},\ \overline{AC_1}=\left\{\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{a}{2},6a\right\}.$$

Угол между прямыми найдем, как угол между их направляющими векторами.

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{A_1B},\overline{AC_1}\right)}{\left|\overline{A_1B}\right|\cdot\left|\overline{AC_1}\right|}=\frac{\left|0\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}+a\cdot\frac{a}{2}-6a\cdot6a\right|}{\sqrt{a^2+36a^2}\cdot\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+36a^2}}=\frac{\left|\frac{a^2}{2}-36a^2\right|}{a\sqrt{37}\cdot a\sqrt{37}}=\frac{71a^2}{2\cdot37a^2}=\frac{71}{74}$$

Тогда $\varphi=\arccos\frac{71}{74}$.

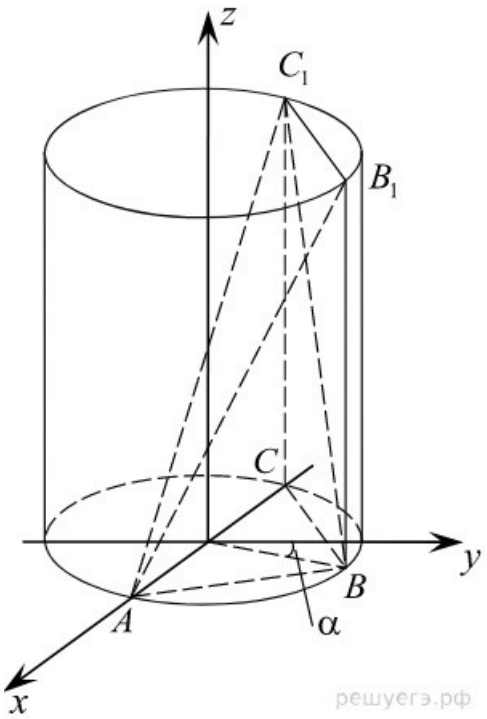
Задание 14 № 520803

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

Решение. Введем прямоугольную декартову систему координат, поместив центр в центр основания цилиндра. Ось ox направим через точку A, oy построим перпендикулярно ей.



Определим координаты точек A, B, C_1. Вводя в рассмотрение высоту цилиндра $BB_1 = h$ и радиус основания - r, получим координаты точек:

$A(r, 0, 0)$, $B(r\sin\alpha, r\cos\alpha, 0)$, $C_1(-r, 0, h)$.

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC_1}$.

$\overline{AB} = \{r(\sin\alpha - 1), r\cos\alpha, 0\}$;

$\overline{BC_1} = \{-r(\sin\alpha + 1), -r\cos\alpha, h\}$.

$$(\overline{AB}, \overline{BC_1}) = r(\sin\alpha - 1)\cdot(-r)(\sin\alpha + 1) + r\cos\alpha \cdot(-r) + 0 \cdot h =$$
$$= r^2(1 - \sin^2\alpha) - r^2\cos^2\alpha = r^2\cos^2\alpha - r^2\cos^2\alpha = 0$$

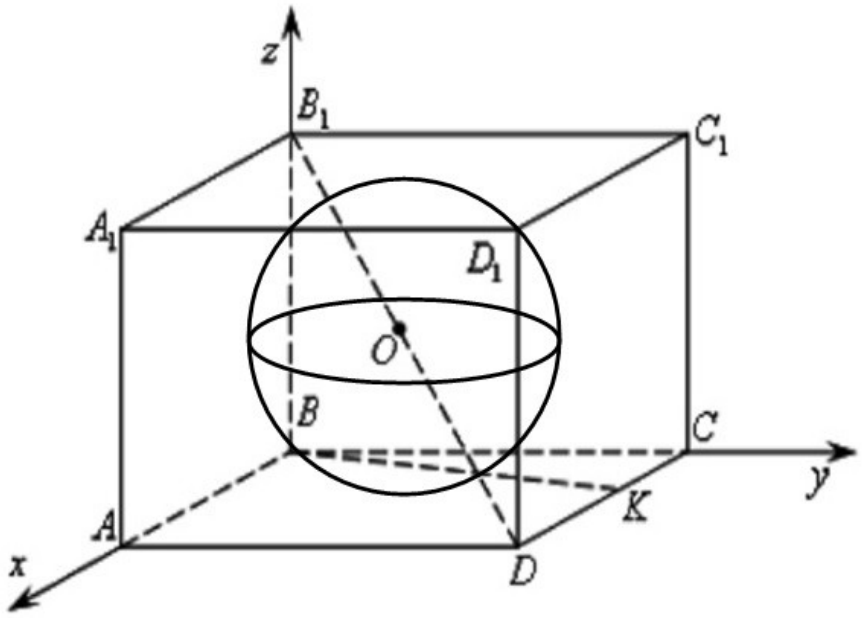
Отсюда следует, что угол между прямыми - $\frac{\pi}{2}$.

Задания Д7 С2 № 505871

Сфера с центром в точке O вписана в прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$Найдите угол между прямыми B_1O и BK где K — середина DC.

Решение. Введем прямоугольную декартову систему координат, поместив начало координат в точку B. Оси координат ox, oy, oz направим соответственно по BA, BC, BB_1. Учтем тот факт, что прямоугольный параллелепипед, в который вписана сфера является кубом, сторону которого, принимаем равной 2. В этом случае координаты необходимых для вычисления угла точек будут иметь вид:

$K(1,2,0)$, $D(2,2,0)$, $B_1(0,0,2)$



Найдем координаты направляющих векторов прямых.

$\overline{B_1D}=\{2,2,-2\}$, $\overline{BK}=\{1,2,0\}$.

$$\varphi=\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{B_1D},\overline{BK}\right)}{\left|\overline{B_1D}\right|\cdot\left|\overline{BK}\right|}=\frac{\left|2\cdot1+2\cdot2-2\cdot0\right|}{\sqrt{4+4+4}\cdot\sqrt{1+4+0}}=\frac{6}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{5}}=\frac{6}{2\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

Задачи на нахождение угла между плоскостями.

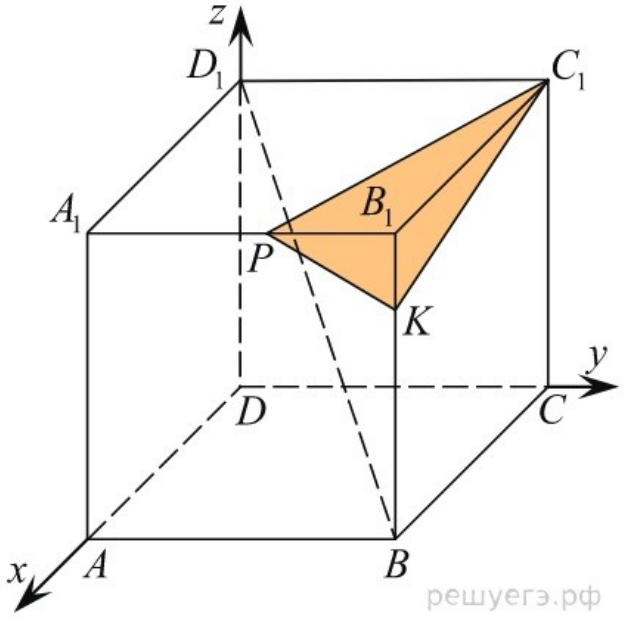
Задание 14 № 509202

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Решение. Выберем систему координат, выбрав за начало точку D и расположив оси по ребрам куба DA, DC, DD_1 соответственно.



Координаты точек, расположенных на кубе имеют вид:

$C_1(0,4,4)$, $K(4,4,3)$, $P\left(4,\frac{8}{3},4\right)$.

Построим уравнение плоскости, содержащей эти точки. Для этого определим направляющие векторы.

$$\overline{C_1K} = \{4,0,-1\},$$

$$\overline{C_1P} = \left\{4,-\frac{4}{3},0\right\},$$

$$\overline{C_1M} = \{x, y-4, z-4\}$$

Уравнение плоскости представим в виде определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} x & y-4 & z-4 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -\frac{4}{3} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель по первой строке

$$x \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - (y-4) \cdot 4 + (z-4) \cdot \left(-\frac{16}{3}\right) = 0,$$

$$PKC_1 : x + 3y + 4z + 28 = 0.$$

Из общего уравнения определим координаты вектора нормали к данной плоскости

$$\bar{N}_{PKC_1} = \{1,3,4\}.$$

Координаты вектора нормали плоскости BB_1C

$$\bar{N}_{BB_1C} = \{0,1,0\}.$$

Угол между искомыми плоскостями определяется как угол между векторами их нормалей.

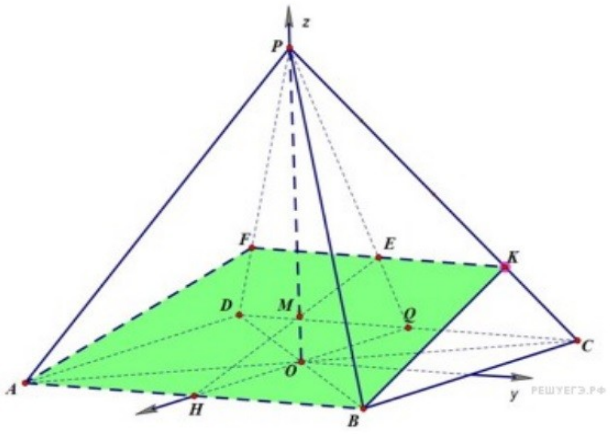
Вычислим его.

$$\cos\alpha = \frac{(\bar{N}_{BB_1C}, \bar{N}_{PKC_1})}{\left|\bar{N}_{BB_1C}\right| \cdot \left|\bar{N}_{PKC_1}\right|} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

Задания Д7 С2 № 511259

В правильной четырехугольной пирамиде *PABCD* все ребра равны между собой. На ребре *PC* отмечена точка *K*. Найдите угол, который образует плоскость *ABK* с плоскостью основания пирамиды, если известно, что *PK* : *KC* = 3 : 1.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат, поместив ее центр в центр квадрата основания и направив оси координат так, как показано на рисунке.



Длину ребра пирамиды возьмем равной 4. Считаем, что O - точка пересечения диагоналей основания пирамиды, Q - середина CD, F - середина AB, E - середина KF, M - точка пересечения PO и F. Тогда $PO = \sqrt{PC^2 - OC^2} = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$. Третья координата точки $z_K = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $AC = 4\sqrt{2}, OC = 2\sqrt{2}$

Найдем необходимые для решения координаты точек:

$A(2,-2,0)$, $B(2,2,0)$, $K\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через эти точки.

Вычислим координаты направляющих векторов:

$$\overline{AB} = \{0,4,0\},$$

$$\overline{AK} = \left\{-7,7,\sqrt{2}\right\},$$

$$\overline{AM} = \{x - 2, y + 2, z\}$$

Уравнение плоскости представим в виде определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z \\ -7 & 7 & \sqrt{2} \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель по первой строке

$$(x-2)\cdot 4\sqrt{2} - (y+2)\cdot 0 + z(28) = 0$$

или

$$\sqrt{2}\cdot x + 7\cdot z - 2\sqrt{2} = 0$$

.

Вектор нормали плоскости ABK : $\bar{N}_1 = \{\sqrt{2}, 0, 7\}$. Уравнение плоскости основания пирамиды: $z = 0$, ее нормаль $\bar{N}_2 = \{0, 0, 1\}$. Вычислим угол между плоскостями, как угол между их нормальными векторами

$$\cos(\bar{N}_1, \bar{N}_2) = \frac{\left|\sqrt{2}\cdot 0 + 0\cdot 0 + 7\cdot 1\right|}{\sqrt{2+0+49}} = \frac{7}{\sqrt{51}}$$

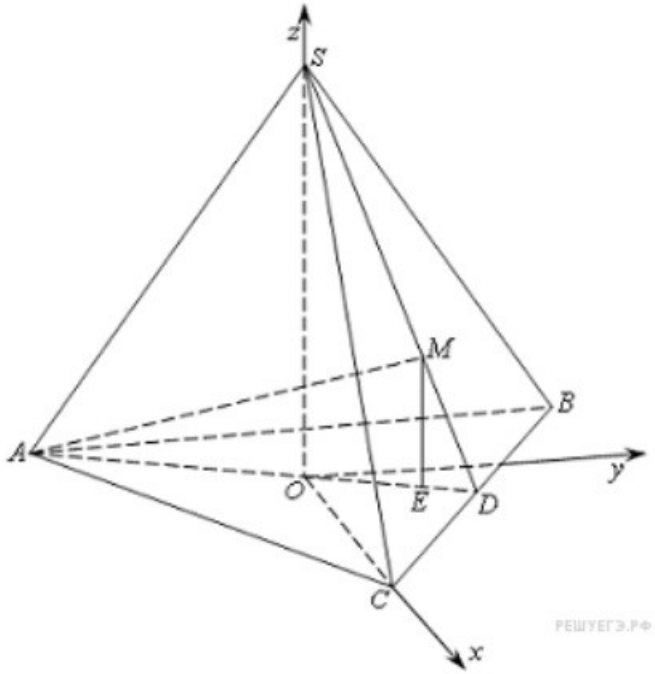
Задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью.

Задания Д7 С2 № 508191

В правильной треугольной пирамиде *SABC* с основанием *ABC* известны ребра $AB = 8\sqrt{3}$ и *SC* = 17. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой *AM*, где *M* — точка пересечения медиан грани *SBC*.

Решение.

Выберем систему координат, поместив ее центр в центр основания пирамиды, и направив оси следующим образом:



Тогда координаты точек будут иметь следующий вид:

$A(-4,-4\sqrt{3},0)$, $B(-4,4\sqrt{3},0)$, $C(8,0,0)$, $A(0,0,15)$, $D(2,2\sqrt{3},0)$.

При делении отрезка в указанном отношении λ

S

$\bar{b}$

M

$\bar{a}$

D

$\bar{b}=\lambda\bar{a}$

$\bar{a}=\{x_M-x_D, y_M-y_D, z_M-z_D\}$;

$\bar{b}=\{x_S-x_M, y_S-y_M, z_S-z_M\}$;

$\lambda(x_M-x_D)=x_S-x_M$;

$\lambda x_M+x_M=\lambda x_D+x_S$;

$x_M = \frac{x_S + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{4}{3}$. Аналогично находим

$y_M = \frac{y_S + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $z_M = \frac{z_S + \lambda z_D}{1+\lambda} = \frac{15}{3} = 5$.

Координаты вектора $\overline{AM} = \left\{\frac{4}{3}+4; \frac{4\sqrt{3}}{3}+4\sqrt{3}; 5\right\} = \left\{\frac{16}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{3}, 5\right\}$.

Плоскость основания пирамиды совпадает с координатной плоскостью oxy и имеет уравнение $z = 0$. Вектор нормали этой плоскости $\overline{n} = \{0,0,1\}$.

Тогда угол α между плоскостью основания и прямой AM вычисляется, как дополнение до прямого угла между векторами $\overline{AM}$ и $\overline{n}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{\left|\frac{4}{3}\cdot 0 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot 0 + 5\cdot 1\right|}{\sqrt{\frac{256}{9}+\frac{768}{9}+25}\cdot\sqrt{0+0+1}} = \frac{15}{\sqrt{1249}}$$

Используя отношение $tg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$, получим

$$tg\alpha = \sqrt{\frac{1249}{225} - 1} = \sqrt{\frac{1024}{225}} = \frac{32}{15}.$$

Задания Д6 С2 № **527357**

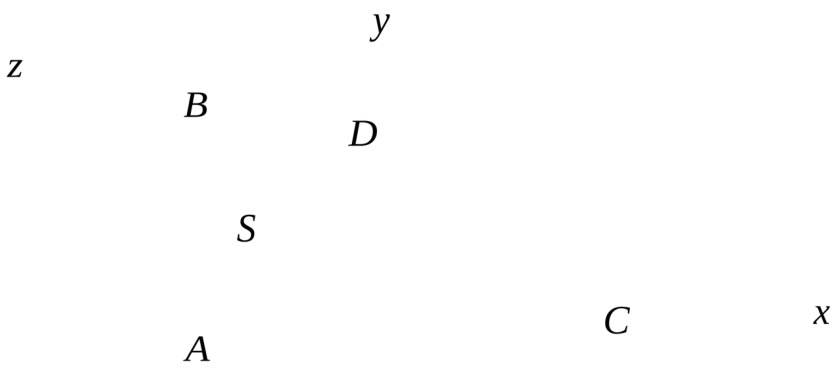
В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и CD взаимно перпендикулярны, $AD = CD$, $\angle DAC = \frac{\pi}{2}, \angle ACD = \frac{\pi}{4}$, угол между ребром DC и гранью ABC равен $\frac{\pi}{6}$.

а) Докажите, что середина ребра AB равноудалена от плоскости ACD и плоскости BCD.

б) Найдите угол между ребром AB и гранью ACD.

Решение.

а) Введем координаты с началом в точке A и осями, направленными вдоль AC, AD и перпендикуляра к плоскости ACD. За единицу длины выберем длину отрезка $AD = AC$ поскольку ADC — прямоугольный треугольник с углом 45°.



По условию, прямая AB перпендикулярна прямой CD, поэтому и проекция AB на плоскость ACD перпендикулярна CD. Значит, проекция точки B лежит на биссектрисе угла DAC, поэтому координаты B по x и y равны. Пусть $B(a,a,b)$ — координаты этой точки. Координаты остальных вершин принимают вид: $A(0,0,0), C(1,0,0), D(0,1,0)$

По условию, $BC = 1$ то есть $(a-1)^2 + a^2 + b^2 = 1$. Найдем уравнение плоскости ABC, как уравнение плоскости, проходящей через 3 точки.

Вычислим координаты направляющих векторов:

$$\overline{AB} = \{a, a, b\},$$

$$\overline{AC} = \{1, 0, 0\},$$

$$\overline{AM} = \{x, y, z\}$$

Уравнение плоскости представим в виде определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & a & b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель по первой строке

$$(-b)\cdot y + z\cdot a = 0.$$

$$by - az = 0$$

Выразим значение синуса угла между сектором $\overline{DC}$ и плоскостью ABC

$$\sin(\overline{DC},ABC) = \frac{|b|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}$$

Полученное уравнение сводится к $a^2 = b^2$.

Тогда выражение величины BC дает:

$$BC = 1 = \sqrt{(a-1)^2 + a^2 + b^2} = \sqrt{3a^2 - 2a + 1}$$

Отсюда получаем:

$$3a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

В первом случае мы получаем точку A. Второй вариант дает $b = \frac{2}{3}$.

Окончательно получим координаты точки $B(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

Найдем уравнение грани BCD. Определим координаты направляющих векторов.

$$\overline{CB} = \left\{-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\},$$

$$\overline{CD} = \{-1,1,0\},$$

$$\overline{CM} = \{x-1, y, z\}$$

Уравнение плоскости представим в виде определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель по первой строке,

$$2x + 2y - z - 2 = 0 /$$

Середина *AB* имеет координаты $S = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Расстояние до плоскости *ACD*: $z = 0$

$$d_1 = \frac{1}{3}$$

Расстояние до плоскости *BCD*:

$$d_2 = \frac{\left|2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} - 2\right|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом $d_1 = d_2 = \frac{1}{3}$. Что и требовалось доказать.

б) Вектор $\overline{AB}$ коллинеаренвектору $\{1,1,1\}$ поэтому угол между этим вектором и плоскостью $z = 0$ определяется как:

$$\sin(\overline{AB}, ACD) = \frac{2 + 2 - 1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\overline{AB}, \hat{ACD} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$$

3.2. Задачи на нахождение расстояний, решаемые векторным методом в открытых банках заданий.

Задания Д7 С2 № 511231

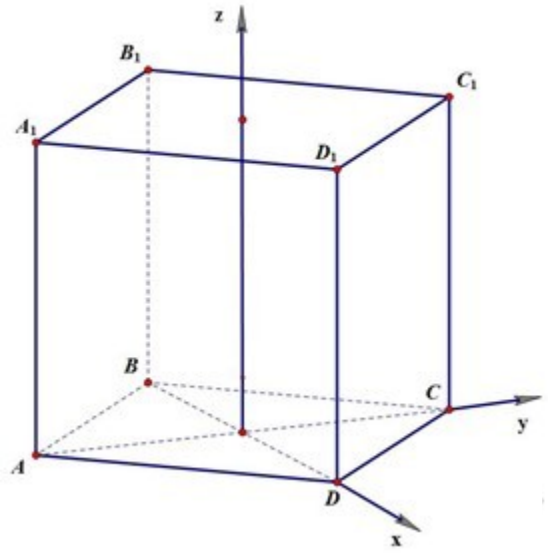
Задача 1. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 8$ и $BD = 6$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми BD_1 и AC, если известно, что боковое ребро призмы равно 12.

Решение.



а) Выберем прямоугольную декартову систему координат таким образом, чтобы ее центр был в точке пересечения диагоналей ромба, а оси направлены по ним.

В этом случае координаты вершин имеют вид: $B(-3,0,0)$, $D_1(3,0,z_1)$, $A(0,-4,0)$, $C(0,4,0)$.

Координаты векторов получим в виде: $\overline{BD_1}=\{6,0,z_1\}$, $\overline{AC}=\{0,8,0\}$

Вычислим скалярное произведение найденных векторов:

$$\left(\overline{AC},\overline{BD_1}\right)=6\cdot 0+0\cdot 8+z_1\cdot 0=0$$

Ввиду необходимого и достаточного условия ортогональности векторов, получим:

$\overline{AC}\perp\overline{BD_1}$, а следовательно прямые AC и BD_1 перпендикулярны.

б) Вычислим расстояние между прямыми BD_1 и AC. По условию задачи координаты вершины $D_1(3,0,12)$. Найдем уравнение плоскости, проходящей

через BD_1, параллельно AC. Сначала определим координаты вектора нормали плоскости, параллельной прямымBD_1 и AC. Найдем его как векторное произведение

$$\bar{n} = \left[\overline{AC}, \overline{BD_1}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \{96, 0, -48\} \parallel \{2, 0, -1\}.$$

Тогда общее уравнение плоскости с вектором нормали $\bar{n}$ будет иметь вид:

$$2 \cdot x + 0 \cdot y - 1 \cdot z + C = 0$$

Так как прямая BD_1 проходит через указанную плоскость, то подставляя в ее уравнение координаты точкиB найдем оставшийся коэффициент

$$C = -(2 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 6$$

Уравнение плоскости окончательно принимает вид:

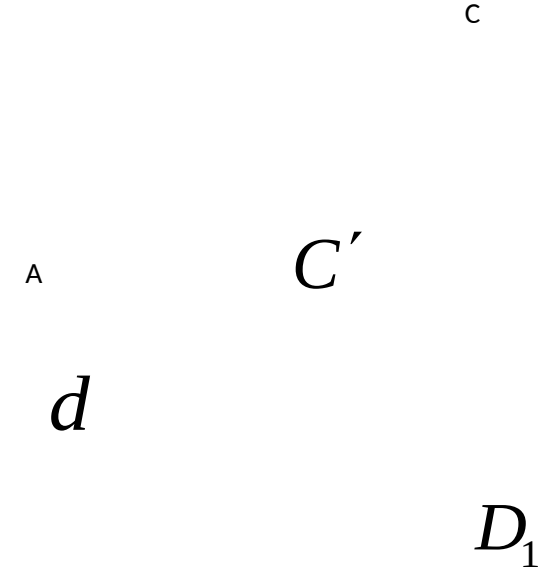
$$2 \cdot x + 0 \cdot y - 1 \cdot z + 6 = 0$$

Расстояние d междускрещивающимися прямыми найдем, как расстояние от любой точки прямой AC до найденной плоскости

$$d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) - 1 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Альтернативный способ нахождения расстояния.

Расстояние между прямыми можно найти, используя геометрический смысл смешанного и векторного произведений.



$$d=\frac{\left|\left(\overline{BA},\overline{AC},\overline{BD_1}\right)\right|}{\left|\left[\overline{AC},\overline{BD_1}\right]\right|}=\frac{V}{S}$$

Вычислим числитель и знаменатель данного выражения.

$$\left(\overline{BA},\overline{AC},\overline{BD_1}\right)=\begin{vmatrix}3 & -4 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 6 & 0 & 12\end{vmatrix}=288$$

$$\left|\left[\overline{AC},\overline{BD_1}\right]\right|=\left|\{96,0,-48\}\right|=48\sqrt{5}$$

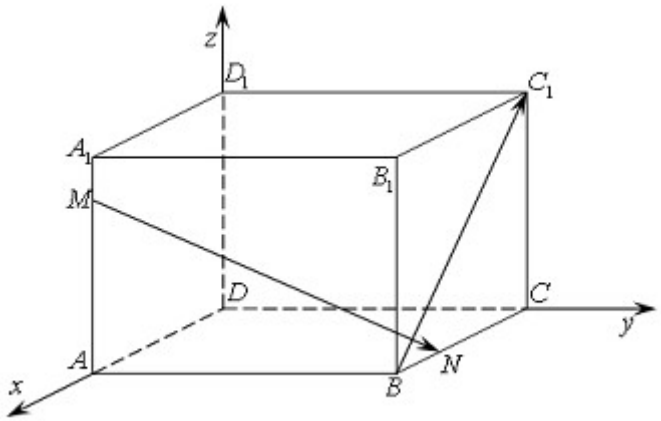
Окончательно получим $d=\frac{V}{S}=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Задания Д7 С2 № 508951

Задача 2. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Точка N — середина CB, а точка M лежит на ребре AA_1, причем $AM : MA_1 = 3 : 1$. Определите расстояние между прямыми MN и BC_1.

Решение.



Выберем прямоугольную декартову систему координат таким образом, чтобы ее центр был в точке D, а точки A,C, D_1 располагались на осях ox, oy, oz соответственно.

При данном выборе системы координат, точки куба имеют к: *M* (4; 0; 3), *N* (2; 4; 0), *B* (4; 4; 0), *C* (0; 4; 4).

Вычислим координаты векторов $\overline{MN}$ и $\overline{BC_1}$:

$\overline{MN} = \{-2, 4, -3\}$, $\overline{BC_1} = \{-4, 0, 4\}$.

Найдем координаты вектора нормали плоскости (π), проходящей через прямую*MN*, параллельно прямой BC_1. Для этого вычислим координаты вектора нормали этой плоскости. Найдем его, как векторное произведение $\overline{MN}$ и $\overline{BC_1}$.

$$\bar{n} = \left[\overline{MN}, \overline{BC_1}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \{16, 20, 16\} \parallel \{4, 5, 4\}.$$

Тогда общее уравнение плоскости с вектором нормали $\bar{n}$ будет иметь вид:

$$4 \cdot x + 5 \cdot y + 4 \cdot z + C = 0$$

Так как прямая *MN* проходит через указанную плоскость, то подставляя в ее уравнение координаты точки *N* найдем оставшийся коэффициент

$C = -(4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 0) = -28$

Уравнение плоскости (π) окончательно принимает вид:

$4 \cdot x + 5 \cdot y + 4 \cdot z - 28 = 0$

Расстояние d междускрещивающимися прямыми найдем, как расстояние от любой точки прямой BC_1 до найденной плоскости (π)

$$d(A, \pi) = \frac{|4 \cdot 0 + 5 \cdot (4) + 4 \cdot 4 - 28|}{\sqrt{16 + 25 + 16}} = \frac{8}{\sqrt{57}}.$$

Альтернативный способ нахождения расстояния.

Расстояние между прямыми можно найти, используя геометрический смысл смешанного и векторного произведений.

N

M N'

$$d=\frac{\left|\left(\overline{MN},\overline{BC_1},\overline{BM}\right)\right|}{\left|\left[\overline{MN},\overline{BC_1}\right]\right|}=\frac{V}{S}$$

Вычислим числитель и знаменатель данного выражения.

$$\left(\overline{MN},\overline{BC_1},\overline{BM}\right)=\begin{Vmatrix}-2 & 4 & -3\\ -4 & 0 & 4\\ 0 & -4 & 3\end{Vmatrix}=32$$

$$\left|\left[\overline{MN},\overline{BC_1}\right]\right|=\left|\{16,20,16\}\right|=\sqrt{912}=4\sqrt{57}$$

Окончательно получим $d=\frac{V}{S}=\frac{8}{\sqrt{57}}$.

Задания Д7 С2 № 521557

Задача 3. Необходимое и достаточное условие скрещивающихся прямых. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

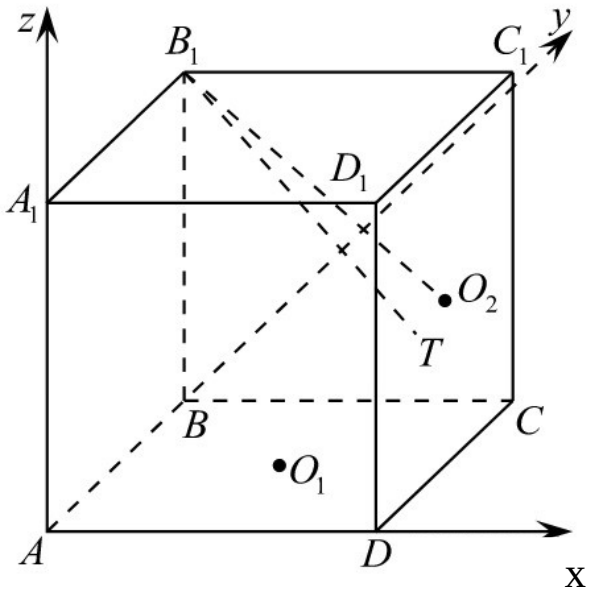
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка O_1 — центр квадрата $ABCD$, точка O_2 — центр квадрата CC_1D_1D.

а) Докажите, что прямые A_1O_1 и B_1O_2 — скрещивающиеся.

б) Найдите расстояние между прямыми A_1O_1 и B_1O_2, если ребро куба равно 2.

Решение.

а**)** Введем систему координат, поместив ее начало в точкеA и расположив оси, как показано на рисунке.



Тогда координаты точек $A_1(0,0,2)$, $B_1(0,2,2)$, $O_1(1,0,0)$, $O_2(2,1,1)$.

Вычислим координаты направляющих векторов прямых A_1O_1 и B_1O_2 .

$\overline{A_1O_1} = \{1,0,-2\}$, $\overline{B_1O_2} = \{2,-1,-1\}$

Также вычислим вектор

$\overline{B_1A_1} = \{0,-2,0\}$

Воспользуемся необходимым и достаточным условием того, что прямые скрещиваются.

Согласно нему докажем, что смешанное произведение векторов $\overline{A_1O_1}$, $\overline{B_1O_2}$, $\overline{B_1A_1}$ не обращается в ноль. Имеем:

$$(\overline{A_1O_1}, \overline{B_1O_2}, \overline{B_1A_1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Следовательно, данные векторы не являются компланарными, поэтому прямые скрещиваются.

б) Расстояние междускрещивающимися прямыми найдем, как высоту тетраэдра построенного на полученных векторах

$$d = \frac{\left|(\overline{A_1O_1}, \overline{B_1O_2}, \overline{B_1A_1})\right|}{\left|\left[\overline{A_1O_1}, \overline{B_1O_2}\right]\right|} = \frac{V}{S}$$

Вычислим числитель и знаменатель данного выражения.

$$(\overline{A_1O_1}, \overline{B_1O_2}, \overline{B_1A_1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$\left| \left[\overline{A_1O_1}, \overline{B_1O_2} \right] \right| = \begin{Vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{Vmatrix} = \left| \{ -2, -3, -1 \} \right| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

Окончательно получим $d = \frac{V}{S} = \frac{6}{\sqrt{14}}$.

Задания Д7 С2 № 527555

Задача 4. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

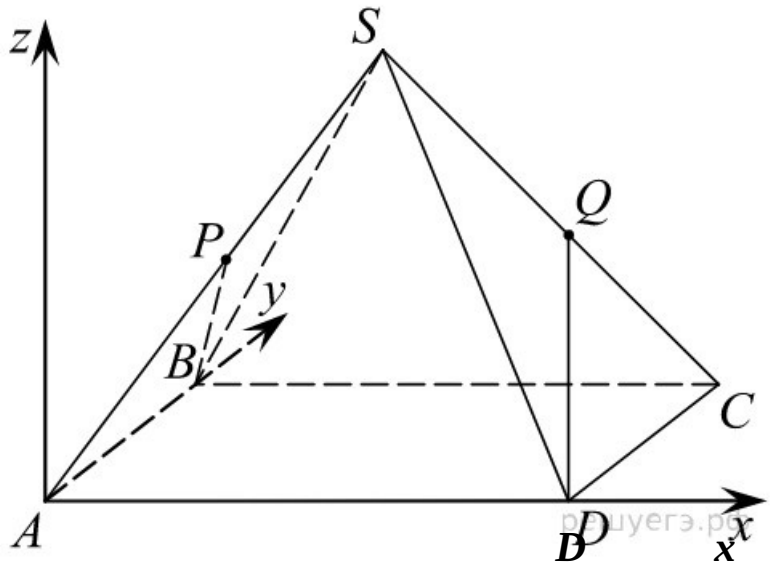
В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *P* — середина ребра *SA*, точка *Q* — середина ребра *SC*.

а) Докажите, что расстояние между прямыми *BP* и *DQ* не зависит от высоты пирамиды.

б) Найдите это расстояние, если площадь основания пирамиды равна 5.

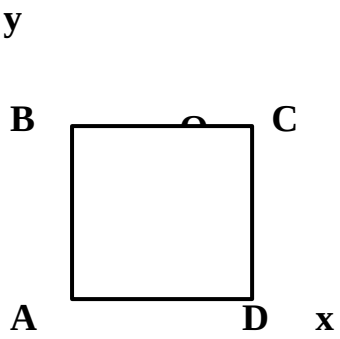
Решение.

Введем систему координат с началом в точке *A* и осями, направленными по ребрам *AD*, *AB* и перпендикуляру к плоскости основания. Обозначим высоту пирамиды за $2h$ а ребро основания за $4a$.



Определим координаты точек из условия задачи:

$A(0,0,0)$, $B(0,4a,0)$, $D(4a,0,0)$, $S(2a,2a,2h)$, $P(a,a,h)$, $Q(3a,3a,h)$.



Вектор $\overline{DQ}$ и $\overline{BP}$ имеют координаты

$\overline{DQ} = \{-a, 3a, h\}$.

$\overline{BP} = \{a, -3a, h\}$.

Найдем уравнение плоскости (α), проходящей через BP, параллельно DQ. Для этого вычислим координаты вектора нормали этой плоскости. Найдем его, как векторное произведение $\overline{DQ}$ и $\overline{BP}$.

$$\bar{n} = \left[\overline{DQ}, \overline{BP}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -a & 3a & h \\ a & -3a & h \end{vmatrix} = \{6ah, 2ah, 0\} \parallel \{3,1,0\}$$

.

Тогда общее уравнение плоскости с вектором нормали $\bar{n}$ будет иметь вид:

$$3 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + C = 0$$

Так как прямая BP проходит через указанную плоскость, то подставляя в ее уравнение координаты точки *B* найдем оставшийся коэффициент:

$$-C = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4a + 0 \cdot 0 = 4a$$

Уравнение плоскости (α) окончательно принимает вид:

$$3 \cdot x + 1 \cdot y - 4a = 0$$

Расстояние d междускрещивающимися прямыми найдем, как расстояние от любой точки прямой DQ до найденной плоскости (α)

$$d(D, \alpha) = \frac{|3 \cdot 4a + 1 \cdot 0 - 4a|}{\sqrt{9+1}} = \frac{8a}{\sqrt{10}}.$$

Полученное значение не зависит от h, следовательно, расстояние между прямыми *BP* и *DQ* не зависит от высоты пирамиды.

Б) Если площадь основания $16a^2 = 5$, то $a = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Тогда расстояние принимает значение

$d(D, \alpha) = \sqrt{2}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системные недостатки преподавания геометрии можно исправлять только полноценным изучением предмета. Важную роль в таком системном подходе занимает векторный метод решения задач. Эффективному изучению и использованию данного метода способствует методически выверенная система тестовых задач и упражнений. Чтобы сформировать у учеников умение переводить текст задачи на векторный язык, следует отработать сначала перевод отдельных элементов текста задачи и их связей на векторный язык, а затем чтение векторных соотношений. Для выработки отмеченных навыков в работе используется составленный банк тестовых задач, позволяющий переводить основные геометрические понятия на язык векторов и находить геометрические интерпретации векторных выражений. Подобный банк заданий систематизирует знания учеников по векторной алгебре, помогает правильно выбрать векторы, которые удобно использовать для решения задачи, а также помогает записать условие задачи с помощью выбранных векторов и сделать соответствующие выводы и обобщения по мере выявления зависимости между ними. Решение задач из банка целесообразно начинать с первых уроков знакомства учащихся с векторами. По мере изучения теории и в процессе решения задач появляются новые векторные соотношения, которые постепенно включаются в банк. Подготовка учащихся к сдаче ЕГЭ требует не только уверенного прохождения теста, составленного из задач банка, но и овладение методами, выходящими за пределы базового курса геометрии. В заключительной главе представлено решение таких задач, разобраны методы и приемы их решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ИСТОЧНИКОВ

[1] Александрова Н.В. Из истории векторного исчисления М., Книжный дом «Либриком», 2012. -272 с.

[2] Новгородова О.И. Методика изучения понятия «Вектор» и его основных свойств в основной школе., диссертация на соискание ученой степени кандидата пед.-наук. Москва, 2006. -131 с.

[3] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Физматлит, 2009, -320 с.

[4] Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов.-М.,1979.,- 560с.

[5] Геометрия. Учеб.пособие для 7-го кл. сред. школы. Под.ред. А.Н. Колмогорова. Изд. 5-е.-М.:Просвещение, 1976, -329с.

[6] Болтянский В.Г., Волович М.В. Векторное изложение геометрии. - М.: Просвещение, 1982.,-144с.

[7]Геометрия: учеб.для 7-9 кл. сред. шк./Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. - М.: Просвещение, 2010.-383с.

[8] Геометрия: учеб.для 10-11 кл. сред. шк./Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. - М.: Просвещение, 2014.-350с.

[9] Погорелов А.В. Геометрия: Учеб.для 7-11 кл. общеобразоват. Учреждений.-6-е изд-е. - М.:Просвещение, 2014.-240с.

[10] Шеховцова Д.Н. Сравнительный анализ школьных учебников геометрии. Статья в сборнике Томского государственного пед. университета. 2009-с.74-76

[11]Мухина В.С. Возрастная психология. Учебник для студентов вузов, 4-е издание, М., Академия, 1999.-456с.

[12]Каменский Я.А. Избранные педагогические сочинения,. М., Педагогика, 1982.-656с.

[13] Гусев В.А., Калягин Ю.М., Луканин Г.Л. Векторы в школьном курсе геометрии.: Пособие для учителей.-М., 1976.-49с.

[14] Иванова Т.А., Серова Н.А. Выпускная квалификационная работа по теории и методике обучения математике: Учебно-методическое пособие. Н. Новгород: НГПУ, 2006.-86с.

[15]http://base.garant.ru/70188902/#friends#ixzz4zdD59jTD

Приказ Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. N 413 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования" С изменениями и дополнениями от:29 декабря 2014 г., 31 декабря 2015 г., 29 июня 2017 г.

[16] https://ege.sdamgia.ru/. Образовательный портал