Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Институт математики, физики и информационных технологий Кафедра функционального анализа

ДОПУЩЕНА К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой
_____/Панасенко Е.А.
«___»_____20___г.

Поверхности вращения и их обобщения

Бакалаврская работа

Студентка 4 курса 01/4003 группы
направления подготовки
01.03.01 Математика
очной формы обучения

Руководитель: доцент кафедры
функционального анализа,
кандидат физико-математических
наук, доцент
Фомичева Юлия Геннадьевна

Тамбов – 2022

Рассказова Т.Н. Поверхности вращения и их обобщения: бакалаврская работа / Рассказова Татьяна Николаевна; Тамбов. ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», Институт математики, физики и информационных технологий, кафедра функционального анализа – Тамбов, 2022. – 34 с.

Ключевые слова: поверхности вращения, квадратичные формы, меридианы, параллели, геодезические линии.

Объектом являются поверхности вращения и их обобщения, **предметом** – основные свойства и характеристики поверхностей вращения.

Цель работы – изучение и исследование поверхностей вращения, рассмотрение их обобщения.

Методы исследования: изучение и анализ научной литературы, метод интегрирования и дифференцирования**.**

Полученные результаты:

в работе рассмотрены основные факты, связанные с поверхностями вращения. Доказаны теоремы, описывающие их свойства. Все они достаточно широко используются в математике, экономике и других отраслях производства. В процессе исследования было показано существование обобщения поверхностей вращения.

Область применения:

результаты исследования имеют как научно-теоретическое, так и прикладное значения и могут быть использованы в научно-практической деятельности студентов-математиков, информатиков и экономистов при изучении предмета «Дифференциальная геометрия и топология», а также в технике и архитектуре.

Содержание

Введение.....4

§1. Основные характеристики поверхности вращения.....8

§2. Омбилические точки поверхности вращения.....13

§3. Замечательные линии поверхности вращения.....18

§4. Поведение геодезических на некоторых поверхностях вращения.....25

§5. Обобщения поверхности вращения.....29

Заключение.....32

Список используемых источников.....33

Введение

Поверхности вращения представляют важную группу поверхностей, которые широко применяются в практике, что объясняется распространенностью вращательного движения, простотой обработки поверхностей вращения на станках.

Поверхности вращения образуются вращением линии (образующей) вокруг неподвижной оси. Образующей может быть как кривая линия, так и прямая линия. Это означает, что поверхности вращения могут быть как линейчатыми, так и нелинейчатыми.

Общий вид поверхности вращения представлен на рис. 1.

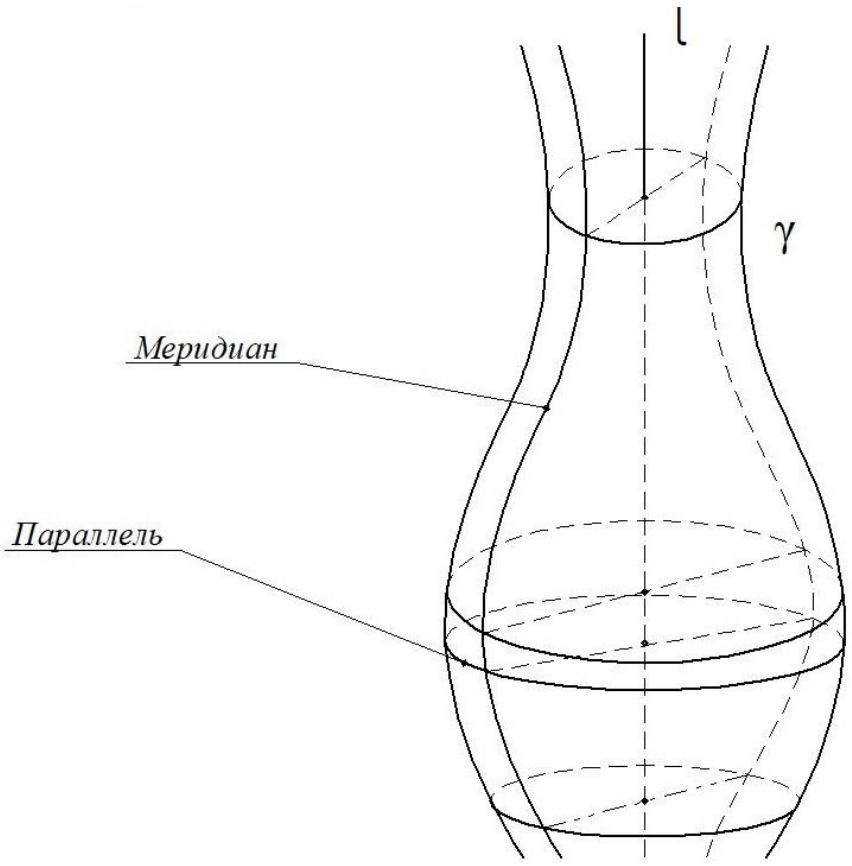


Рис. 1:

Эта поверхность имеет криволинейную образующую γ, которая вращается вокруг вертикальной оси l. Каждая точка образующей линии γ при вращении вокруг оси l описывает окружность. Плоскости, перпендикулярные к оси l, пересекают поверхность вращения по окружностям, которые называются

параллелями.

Любая плоскость, содержащая ось вращения l, пересекает поверхность вращения по линиям, которые называются меридианами.

Введём уравнение поверхности вращения Φ. Выберем в пространстве E^3 прямоугольную декартову систему координат так, что ось Oz совпадает с осью вращения поверхности Φ. Проведём через Oz плоскость π: $\pi \cap \Phi = \gamma$, где γ- меридиан поверхности Φ. В плоскости π введём прямоугольную декартову систему координат uoz: $\gamma \subset \pi$; (см. рис. 2) Допустим, что γ- регулярная кривая, задаваемая уравнением $z = f(u)$. Возьмем на линии γ произвольную точку $P: P \in \gamma \subset \Phi;\ \pi \cap xoy = Ou$.

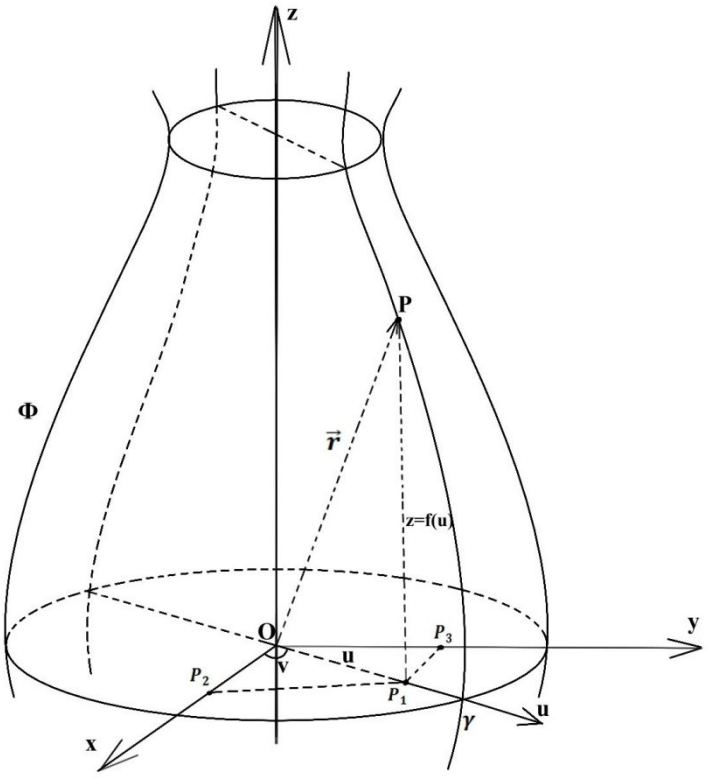


Рис. 2:

Обозначим $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{OP}$- радиус-вектор точки P. P_1- проекция точки P на ось Ou в плоскости π; $|OP_1| = u$; P_2- проекция точки P_1- на ось Ox; P_3- проекция точки P_1- на ось Oy.

$$PP_1 = f(u) = z;$$

$$OP_2 = x;\ OP_3 = y;$$

Пусть $P_2OP_1 = v$. Тогда из $\triangle OP_1P_2$: $OP_2 = OP_1\cos v = u\cos v$, $P_1P_2 = OP_3 = OP_3 = OP_1\sin v = u\sin v$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \{x,\ y,\ z\}$, где $x = OP_2 = u\cos v$, $y = OP_3 = u\sin v$; $z = PP_1 = f(u)$.

Таким образом, получено векторное уравнение поверхности вращения

$$\Phi:\ \vec{r}(u,v) = \{u\cos v;\ u\sin v;\ f(u)\}; \qquad (1)$$

где $f(u)$- заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Дифференцируя векторное уравнение (1), найдем первые и вторые частные производные функции $\vec{r}(u,v)$:

$$\vec{r}_u = \{\cos v;\ \sin v;\ f'(u)\};$$
$$\vec{r}_v = \{-u\sin v;\ u\cos v;\ 0\};$$
$$\vec{r}_{uu} = \{0;\ 0;\ f''(u)\};$$
$$\vec{r}_{uv} = \{-\sin v;\ \cos v;\ 0\};$$
$$\vec{r}_{vv} = \{-u\cos v;\ -u\sin v;\ 0\}.$$

Находим первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$\Phi:\ I(\Phi) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2;$$

где $E = \vec{r}_u^{\,2} = 1 + f'^2(u)$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$, $G = \vec{r}_v^{\,2} = u^2$.

Первая квадратичная форма поверхности Φ имеет вид:

$$I(\Phi) = (1 + f'^2(u))du^2 + u^2dv^2; \qquad (2)$$

Из (2) следует, что координатная сеть линий поверхности Φ ортогональна, поскольку $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$.

Заметим, что в выбранной параметризации (1) u- линии $(v = v_0 = const)$- это меридианы поверхности Φ; v- линии $(u = u_0 = const)$- это параллели поверхности Φ.

Вектор нормали $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$;

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \{-uf'(u)\cos v;\ -uf'(u);\ u\};$$
$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{u^2(f'^2(u)+1)} = |u|\sqrt{f'^2(u)+1};$$
$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{f'^2(u)+1}}\{f'(u)\cos v;\ f'(u)\sin v;\ -1\};$$

Не ограничивая общности можно считать, что $u>0$ и $-\frac{u}{|u|}=-1$. Тогда

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{f'^2(u)+1}}\{-f'(u)\cos v;-f'(u)\sin v;\ 1\};\qquad(3)$$

Находим коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=\frac{f''(u)}{\sqrt{f'^2(u)+1}};\ M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=0;\ N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}=\frac{uf'(u)}{\sqrt{f'^2(u)+1}}.$$

Тогда

$$II(\Phi)=\frac{f''(u)}{\sqrt{f'^2(u)+1}}du^2+\frac{uf'(u)}{\sqrt{f'^2(u)+1}}dv^2;\qquad(4)$$

Поскольку $F=M=0$, то координатные линии поверхности Φ являются линиями кривизны.

Покажем, что при соответствующем выборе криволинейных координат на поверхности вращения Φ ее первая квадратичная форма (2) может быть приведена к виду:

$$I(\Phi)=dU^2+G(U)dV^2;\qquad(5)$$

Действительно, сделаем замену переменных в (2), обозначив через

$$dU=\sqrt{1+f'^2(u)}\,du;\ dV=dv;\qquad(6)$$

Тогда

$$U(u)=\int\sqrt{1+f'^2(u)}\,du+c_1,\qquad(7)$$

где $c_1=const$.

Выразив из (7) $u=u(U)$ и подставив в (2) получим:
$I(\Phi)=dU^2+u^2(U)dV^2$. Обозначим $u^2(U)=G(U)$. Тогда $I(\Phi)$ примет вид (5).

§1. Основные характеристики поверхности вращения.

Из курса дифференциальной геометрии известно, что основными характеристиками поверхностей является ее полная и средняя кривизна.

Зная первую и вторую квадратичные формы поверхности вращения, находим ее гауссову (полную) и среднюю кривизны.

$$K(\Phi)=\frac{\ln - M^2}{EG-F^2}=\frac{\ln}{EG}=\frac{uf'(u)f''(u)}{u^2(1+f'^2(u))^2}=\frac{f'(u)f''(u)}{u(1+f'^2(u))^2}; \tag{8}$$

$$H(\Phi)=\frac{EN-2MF+LG}{2(EG-F^2)}=\frac{EN+LG}{2(EG-F^2)}=\frac{uf''(u)+f'(u)(1+f'^2(u))}{2u(1+f'^2(u))^{3/2}}; \tag{9}$$

Учитывая, что $K(\Phi)=k_1\cdot k_2$, $H(\Phi)=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$, где k_1,k_2 главные кривизны поверхности, из (6), (7) легко найти главные кривизны поверхности вращения.

Имеем:

$$\begin{cases} k_1\cdot k_2=K(\Phi) \\ k_1+k_2=2H(\Phi) \end{cases}$$

Тогда: $4H^2=k_1+2k_1\cdot k_2+k_2{}^2=k_1{}^2+k_2{}^2+2K$. Отсюда $k_1{}^2+k_2{}^2=4H^2-2K$; $k_2=2H-k_1$. Тогда $k_1{}^2+(2p-k_1)^2=4H^2-2K$ или после несложных преобразований получили квадратное уравнение относительно k_1:

$$k_1{}^2-2Hk_1+K=0; \tag{10}$$

Решая уравнение (10), находим:

$$k_1=H\pm\sqrt{H^2-K}; \tag{11}$$

$$k_2=2H-k_1=2H-\ H\pm\sqrt{H^2-K}=\ H\pm\sqrt{H^2-K}; \tag{12}$$

Из (11) , (12) видим, что

$$k_1=H+\sqrt{H^2-K}, k_2=H-\sqrt{H^2-K}; \tag{13}$$

Из (13) находим главные радиусы кривизны поверхности вращения:

$$R_1=\frac{1}{k_1}=\frac{1}{H+\sqrt{H^2-K}}; R_1=\frac{1}{k_2}=\frac{1}{H-\sqrt{H^2-K}}; \tag{14}$$

где $H(\Phi)$ и $K(\Phi)$ определяются формулами (8) и (9) соответственно.

Теорема 1. *Один из главных радиусов кривизны поверхности вращения равен длине отрезка нормали к поверхности, заключенному между поверхностью и осью вращения.*

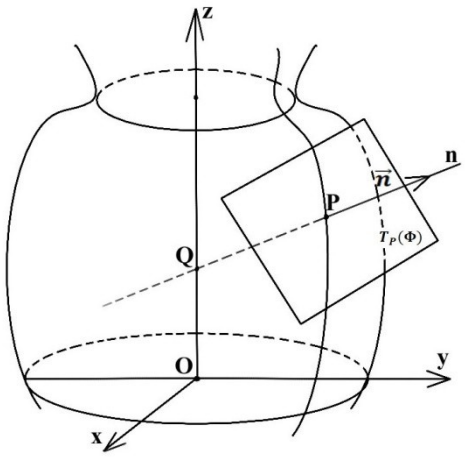


Рис. 3:

Доказательство. $\Phi: \vec{r}(u,v)=\{u\cos v; u\sin v; f(u)\}$. Возьмем любую точку $P \in \Phi$. $P(u\cos v; u\sin v; f(u))$. Проведем касательную плоскость $T_p(\Phi)$ к поверхности Φ в точке P и нормалью n к поверхности Φ в этой точке: $n \perp T_p(\Phi)$ (см. рис. 3). Прямая n определяется точкой P и вектором $\vec{n}$, где

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(u)}}\{-f'(u)\cos v; -f'(u)\sin v, 1\};$$

Тогда каноническое уравнение нормали n имеет вид:

$$n: \frac{x-u\cos v}{-f'(u)\cos v}=\frac{y-u\sin v}{-f'(n)\sin v}=\frac{z-f(n)}{1}; \qquad (15)$$

Нормаль n пересекает ось вращения Oz в точке Q. Найдем координаты точки Q. Для удобства вычислений запишем (15) в параметрической форме:

$$n: \begin{cases} x=u\cos v-(f'(u)\cos v)t \\ y=u\sin v-(f'(n)\sin v)t \\ z=f(n)+t \end{cases}; \qquad (16)$$

где t – параметр на прямой n.

$$Q=\ n\cap Oz: \begin{cases} x=u\cos v-(f'(u)\cos v)t \\ y=u\sin v-(f'(u)\ \sin v)t; \\ z=f(u)+t \end{cases} \qquad (17)$$

Из первых двух уравнений системы (17) найдем t : $t=\frac{u}{f'(u)}$, где $f'(u)\neq 0$. Тогда

$z=f(u)+\frac{u}{f'(u)}$ и точка Q имеет координаты: $Q\left(0;0;f(u)+\frac{u}{f'(u)}\right),(f'(u)\neq 0);$

Найдем $|PQ|$

$$|PQ|=\sqrt{u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v+\left(f(u)+\frac{u}{f'(u)}-f(u)\right)^2}=\sqrt{u^2+\frac{u}{f'^2(u)}}=\left|\frac{u}{f'(u)}\right|\cdot\sqrt{1+f'^2(u)}=\frac{u}{f'(u)}\sqrt{1+f'^2(u)},$$

так как $u>0;\ f'(u)>0.$

Найдем главный радиус кривизны поверхности в точке P. Из (14) имеем

$R=\frac{1}{H\pm\sqrt{H^2-K}}$. Найдем H^2-K, используя формулы (8) и (9):

$$H^2-K=\frac{\left(uf''+f'(1+f'^2)\right)^2}{4n^2(1+f'^2)^3}-\frac{f'\cdot f''}{u(1+f'^2)^2}=\frac{\left(uf''-f'(1+f'^2)\right)^2}{4n^2(1+f'^2)^3}.$$

Тогда

$$R=\frac{1}{H-\sqrt{H^2-K}}=\frac{1}{\frac{uf''+f'(1+f'^2)}{2u(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{uf''-(1+f'^2)}{2u(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}}=$$

$$=\frac{2u(1+f'^2)^{3/2}}{uf''+f'(1+f'^2)-uf''+f'(1+f'^2)}=\frac{u(1+f'^2)}{f'}=|PQ|.$$

.

Теорема 2. *Плоскость и катеноид является единственными минимальными поверхностями вращения.*

Доказательство. Известно, что поверхность называется минимальной, если ее средняя кривизна в каждой точке равна нулю. Из (9) имеем:

$H(\Phi)=\frac{uf''(u)+f'(u)(1+f'^2(u))}{2u(1+f'^2)^{3/2}}=0.$ Отсюда, учитывая, что $u>0$, имеем:

$$f'(u)(1+f'^2(u))+uf''(u)=0;\qquad (18)$$

Полагаем, что $t(u)=f'(u)$. Тогда $t'(u)=f''(u)$ и уравнения (18) примет вид:

$$ut'+t(1+t^2)=0;\quad u\frac{dt}{du}+t(1+t^2)=0;$$

$$\frac{dt}{t(1+t^2)}+\frac{du}{u}=0,\ (u>0;t\neq 0);\qquad (19)$$

Заметим, что $\frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{1+t^2}=\frac{At^2+Bt^2+Ct+A}{t(1+t^2)}=\frac{(A+B)t^2+Ct+A}{t(1+t^2)}$. Отсюда, имеем систему для нахождения A, B, C:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases};$$

Решим эту систему, получим, что $A=1,\ B=-1,\ C=0.$ Следовательно:

$$\frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}; \qquad (20)$$

Тогда уравнение (19) с учетом (20) примет вид: $\frac{du}{u}+\frac{dt}{t}-\frac{tdt}{t^2+1}=0$

Интегрируя это уравнение, получим: $\ln|u|+\ln|t|-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)=lnC$, где $C=const>0.$ Отсюда находим:

$$\frac{|ut|}{\sqrt{t^2+1}}=C; \qquad (21)$$

Из уравнения (21) найдем t:

$$|ut|=C\cdot\sqrt{t^2+1};$$

$$(ut)^2=C^2(t^2+1),\quad (u^2-C^2)t^2=C^2;$$

$$t=\pm\frac{C}{\sqrt{u^2-C^2}},\quad (u^2-C^2>0);$$

Отсюда имеем: $f'(u)=\pm\frac{C}{\sqrt{u^2-C^2}}$ или $df=\pm\frac{Cdu}{\sqrt{u^2-C^2}}$. Интегрируя последнее равенство, получим:

$$f(u)=\pm C\int\frac{du}{\sqrt{u^2-C^2}}=\pm C\int dp=\pm Cp+C_1;$$

Так как $u=Cch\,p,$ то $\frac{u}{C}=\frac{e^{2p}+1}{2e^p}$. Отсюда $e^p=\frac{u}{C}\pm\sqrt{\frac{u^2}{C^2}-1}.$ Тогда

$p=\ln\left(\frac{u}{C}\pm\sqrt{\frac{u^2}{C^2}-1}\right)$. Поэтому

$$f(u)=C\ln\left(\frac{u}{C}\pm\sqrt{\frac{u^2}{C^2}-1}\right)+C_1; \qquad (22)$$

Из (22) следует, что линия γ, образующая поверхность вращения, задается уравнением:

$$z = f(u) = C \ln\left(\frac{u}{C} \pm \sqrt{\frac{u^2}{C^2} - 1}\right) + C_1. \qquad (23)$$

Определим вид линии γ. Для этого из (23) выразим u через z:

$$\frac{z}{C} = \ln\left(\frac{u}{C} \pm \sqrt{\frac{u^2}{C^2} - 1}\right) + C_1;$$

$$\frac{u}{C} \pm \sqrt{\frac{u^2}{C^2} - 1} = e^{\frac{z}{C} - C_1};$$

$$\pm \sqrt{\frac{u^2}{C^2} - 1} = e^{\frac{z}{C} - C_1} - \frac{u}{C};$$

$$\frac{u^2}{C^2} - 1 = e^{2\left(\frac{z}{C} - C_1\right)} - 2 \cdot \frac{u}{C} \cdot e^{\frac{z}{C} - C_1} + \frac{u^2}{C^2};$$

$$2 \cdot \frac{u}{C} \cdot e^{\frac{z}{C} - C_1} = e^{2\left(\frac{z}{C} - C_1\right)} + 1;$$

$$\frac{u}{C} = \frac{e^{2\left(\frac{z}{C} - C_1\right)} + 1}{2 \cdot e^{\frac{z}{C} - C_1}} = ch\left(\frac{z}{C} - C_1\right);$$

$u = C\,ch\left(\frac{z}{C} - C_1\right)$ - уравнение цепной линии.

Итак, уравнение (20) при $C > 0$ задает цепную линию. Следовательно, поверхность Φ получена при вращении цепной линии вокруг оси Oz, то есть Φ – катеноид.

Если $t = 0$, то $f'(u) = 0$. Тогда $f'(u) = C_3 = const$. Тогда уравнение линии γ: $z = f'(u) = C_3 = const$, то есть γ - прямая линия, параллельная оси Oy;

$Oy \perp Oz$, поэтому $\gamma \perp Oz$.

Поверхность Φ, полученная при вращении прямой линии, ортогональной оси вращения, является плоскостью.

§2. Омбилические точки поверхности вращения.

Запишем уравнение индикатрисы Дюпена для поверхности вращения Φ, заданной уравнением (1):

$$L x^2 + 2 M xy + N y^2 = \pm 1.$$

С учетом коэффициентов L, M, N второй квадратичной формы поверхности Φ (4), уравнение индикатрисы Дюпена примет вид:

$$\frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)}} x^2 + \frac{u f'(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)}} y^2 \pm 1; \qquad (24)$$

Как известно из курса дифференциальной геометрии, индикатриса Дюпена определяет тип точек поверхности в зависимости от знака дискриминанта уравнения (24).

$$\Delta = M^2 - \ln = - \ln = - \frac{u f'(u) f''(u)}{1+f'^2(u)}; \qquad (25)$$

Из (25) имеем:

$$\frac{f'(u) f''(u)}{1+f'^2(u)} = - \frac{\Delta}{u}; \qquad (26)$$

Из (8) имеем: $K(\Phi) = \frac{f'(u) f''(u)}{u(1+f'^2)^2}$. Тогда с учетом (26) получим:

$$K(\Phi) = - \frac{\Delta}{u} \cdot \frac{1}{u(1+f'^2)^{\square}} = \frac{\Delta}{u^2(1+f'^2)^{\square}}; \qquad (27)$$

Поскольку $u^2(1+f'^2) > 0$ при любых $u > 0$, то из (27) следует, что знак $K(\Phi)$ определяется знаком дискриминанта Δ: если в некоторой точке P поверхности вращения Φ гауссова кривизна $K(\Phi) > 0$, то из (27) следует, что $\Delta < 0$, следовательно, точка P - элиптическая точка поверхности. Индикатриса Дюпена в точке P является эллипсом или окружностью.

Если индикатриса Дюпена в точке P является окружностью, то точка P - точка округления или омбилическая точка. Омбилические точки характеризуются тем условием, что главные кривизны поверхности по всем направлениям равны

между собой, то есть $k_1 = k_2$.

Тогда из (13) получим: $H + \sqrt{H^2 - K} = H - \sqrt{H^2 - K}$, то есть $H^2 - K = 0$. Отсюда получил:

$$0 = H^2 - K = \frac{\left(uf'' - f'\left(1 + f'^2\right)\right)^2}{4u^2\left(1 + f'^2\right)^3}, \text{ где } u > 0,\ 1 + f'^2(u) > 0.$$

Поэтому:

$$uf'' - f'\left(1 + f'^2\right) = 0; \tag{28}$$

Пусть γ - меридиан поверхности Φ, проходящий через точку P.

$\gamma = u$ - линии: $v = v_0 = const$. Тогда γ: $\vec{r}(u) = \left\{u\cos v_0; u\sin v_0; f(u)\right\}$.

Найдем кривизну меридиана γ.

$$\vec{r}'(u) = \left\{\cos v_0; \sin v_0; f'(u)\right\};$$

$$\vec{r}''(u) = \left\{0;\ 0;\ f''(u)\right\};$$

Отсюда $\vec{r}'(u) \times \vec{r}''(u) = \left\{f''(u)\sin v_0; -f''(u)\cos v_0; 0\right\}$;

$$\left|\vec{r}'(u) \times \vec{r}''(u)\right| = \left|f''(u)\right|;$$

$$\left|\vec{r}'(u)\right| = \sqrt{1 + f'^2(u)};$$

Тогда:

$$k(\gamma) = \frac{\left|\vec{r}'(u) \times \vec{r}''(u)\right|}{\left|\vec{r}'(u)\right|^3} = \frac{\left|f''(u)\right|}{\left(1 + f'^2(u)\right)^{3/2}}; \tag{29}$$

Поэтому радиус кривизны меридиана γ в точке P равен:

$$R(\gamma) = \frac{\left(1 + f'^2(u)\right)^{3/2}}{\left|f''(u)\right|}. \tag{30}$$

Найдем длину отрезка PQ главной нормали меридиана γ, заключенную между меридианом и точкой на оси поверхности вращения (см. рис. 4).

$\vec{v} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$, где $\vec{\beta}$-орт бинормали γ, $\vec{\tau}$ - орт касательной линии γ.

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{r}'(u) \times \vec{r}''(u)}{\left|\vec{r}'(u) \times \vec{r}''(u)\right|} = \left\{\sin v_0; -\cos v_0; 0\right\};$$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'(u)}{\left|\vec{r}'(u)\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}\left\{\cos v_0; \sin v_0; f'(u)\right\};$$

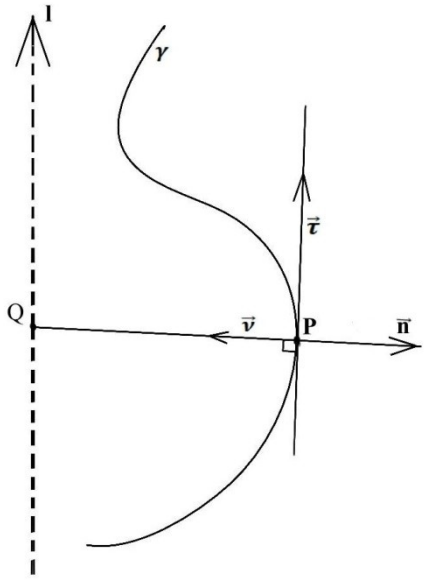


Рис. 4:

$$\vec{\nu}=\vec{\beta}\times\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(u)}}\left\{-f'(u)\cos v_0;-f'(u)\sin v_0;1\right\}=-\vec{n};$$

$$PQ:\ \frac{x-u\cos v_0}{-f'(u)\cos v_0}=\frac{y-u\sin v_0}{-f'(u)\sin v_0}=\frac{z-f(u)}{1};$$

или

$$PQ:\begin{cases}x=u\cos v_0-f'(\cos v_0)t\\ y=u\sin v_0-f'(\sin v_0)t\\ z=f(u)+t\end{cases};$$

$PQ\cap L=Q;\ l=Oz$. Тогда $t=\frac{u}{f'(u)};\ (f(u)\neq 0);\ z=f(u)+\frac{u}{f'(u)};\ Q\left(0;0;f(u)+\frac{u}{f'(u)}\right).$

$$|PQ|=\sqrt{(u\cos v_0)^2+(u\sin v_0)^2+\frac{u^2}{f'^2(u)}}=\frac{u}{|f'(u)|}\sqrt{1+f'^2(u)};\qquad(31)$$

Выразим $f''(u)$ из (28). Получим:

$$f''(u)=\frac{f'(1+f'^2)}{u};\qquad(32)$$

С учетом (32)

$$R(\gamma)=\frac{(1+f'^2)^{3/2}\cdot u}{|f'|\cdot(1+f'^2)}=\frac{u}{|f'(u)|}\sqrt{1+f'^2}=|PQ|;$$

Итак, доказано утверждение:

Теорема 3. *В омбилической точке поверхности вращения, длина отрезка*

главной нормали меридиана между точкой меридиана и осью вращения равна радиусу его кривизны.

Из теоремы 3 следует, что в омбилической точке поверхности вращения центр кривизны меридиана лежит на оси вращения. Этот факт позволяет определить наличие точек округления на поверхности вращения.

Кроме этого, поскольку $\vec{\nu} = -\vec{n}$ вдоль меридиана γ, то это означает, что нормаль к поверхности вращения лежит в плоскости меридиана (см. рис. 5).

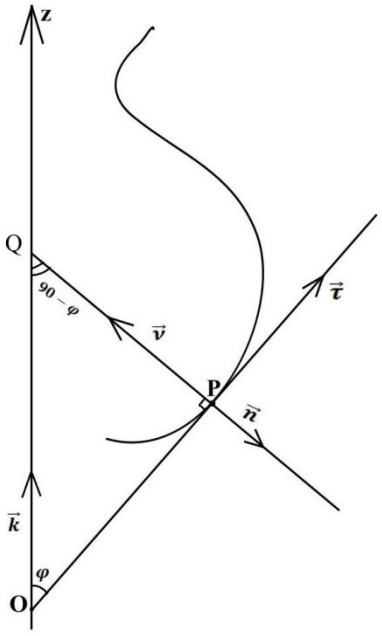


Рис. 5:

Обозначим через φ угол между вектором $\vec{\tau}$ и $\vec{k}$, где $\vec{\tau}$ - орт касательной к меридиану в точке P; $\vec{k}$ - орт оси Oz; $\vec{\tau} \perp \vec{\nu}$, где $\vec{\nu}$ - орт главный нормали меридиана γ; $|\vec{n}| = |\vec{\tau}| = |\vec{\nu}| = |\vec{k}| = 1$. Тогда $\vec{\tau} \cdot \vec{k} = |\vec{\tau}| \cdot |\vec{k}| \cos\varphi = \cos\varphi$; $\vec{\nu} \cdot \vec{k} = |\vec{\nu}| \cdot |\vec{k}| \cos(90 - \varphi) = \sin\varphi$.

С другой стороны: $\vec{k} = (0;0;1)$; $\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\{\cos v_0; \sin v_0; f'(u)\}$;

$$\vec{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\{-f' \cos v_0; -f' \sin v_0; 1\} = -\vec{n};$$

Поэтому:

$$\cos\varphi = \vec{\tau} \cdot \vec{k} = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}; \tag{33}$$

$$\sin\varphi = \vec{\nu} \cdot \vec{k} = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}; (\sin\varphi > 0); \tag{34}$$

Из (33) и (34) получим:

$$\frac{f'}{1+f'^2}=\sin\varphi\cos\varphi\,; \tag{35}$$

Ели φ - острый угол (см. рис. 5), то $\vec{v}$ направлен к оси вращения, а $\vec{n}$ - от оси вращения. Следовательно, линия γ обращена выпуклостью от вращения. В этом случае $K(\Phi)>0.$ Если угол угол φ - тупой (см. рис. 6), то $\vec{v}$ направлен от оси вращения, а $\vec{n}$ - к оси вращения. В этом случае $K(\Phi)<0.$

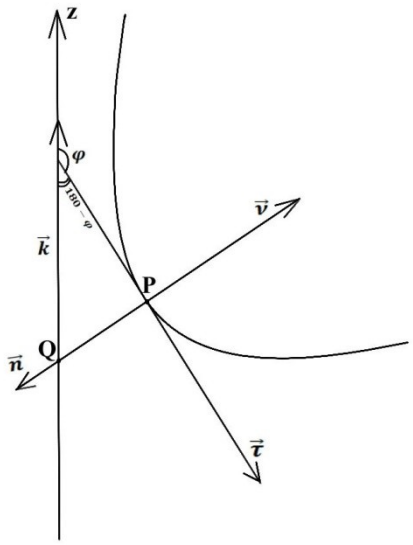


Рис. 6:

§3. Замечательные линии поверхности вращения.

1. Асимптотические линии

Линия на поверхности Φ называется асимптотической, если ее касательный вектор является вектором асимптотического направления.

Уравнение асимптотической линии

$$Ld u^2 + 2 Mdudv + Nd v^2 = 0.$$

Для поверхности вращения, заданной уравнением (1) уравнение асимптотической линии имеет вид:

$$f'' d u^2 + u f' d v^2 = 0; \qquad (36)$$

$$u f' d v^2 = - f'' d u^2;$$

$$dv = \pm \sqrt{- \frac{f''}{u f'}} du, \qquad (37)$$

где $- \frac{f''}{u f'} \geq 0$, то есть f'' и f' разных знаков.

Уравнение асимптотических линий определено только тогда, когда f'' и f' разных знаков, то есть в гиперболических точках поверхности. Из (37) имеем

$$v = \pm \int \sqrt{- \frac{f''}{u f'}} du + c, \qquad (38)$$

где $c = const$.

Например, найдем асимптотические линии на катеноиде:

$$\Phi: \ \vec{r}(u, v) = (chucosv; chusinv; u).$$

$$I(\Phi) = ch^2 ud u^2 + ch^2 ud v^2;$$

$$II(\Phi) = d u^2 - d v^2.$$

Уравнение асимптотических линий катеноида имеет вид:

$$dv = \pm du;$$

$v = \pm u + c$, где $c = conct$.

Первое семейство асимптотических:

$$\vec{r}(u) = (chucos(c - u); chusin(c - u); u).$$

Второе семейство асимптотических:

$$\vec{r}(u)=\{chucos(c+u);chusin(c+u);u\}.$$

2. Линии кривизны

Как было показано ранее, линиями кривизны для поверхности вращения являются параллели и меридианы.

3. Геодезические линии

Для ортогональной координатной сети поверхности вращения уравнения геодезических имеют вид:

$$\begin{cases} 2E\dfrac{d^2u}{ds^2}E_u\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2+2E_v\dfrac{du}{ds}\cdot\dfrac{dv}{ds}-G_u\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2=0 \\ 2G\dfrac{d^2u}{ds^2}E_v\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2+2G_u\dfrac{du}{ds}\cdot\dfrac{dv}{ds}+G_v\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2=0 \end{cases}; \tag{39}$$

Ранее было доказано, что первая квадратичная форма поверхности вращения приводится к виду (5):

$$I(\Phi)=dU^2+G(U)dV^2$$

Тогда $E=1$, $F=0$, $G=G(U)$ и, следовательно, $E_u=E_v=G_v=0$. Тогда уравнение (39) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{ds^2}-G_u\left(\dfrac{dV}{ds}\right)^2=0 \\ 2G\dfrac{d^2V}{ds^2}+2G_u\dfrac{dU}{ds}\cdot\dfrac{dV}{ds}=0 \end{cases}; \tag{40}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (40). Разделим обе его части на 2, получим:

$$G\frac{d^2V}{ds^2}+G_u\frac{dU}{ds}\cdot\frac{dV}{ds}=0; \tag{41}$$

$$\frac{d}{ds}\left(G\frac{dV}{ds}\right)=0; \tag{42}$$

Из уравнения (42) имеем:

$$G\frac{dV}{ds}=c, \tag{43}$$

где $c=const$. Уравнение (43) можно легко проинтегрировать. Для этого перепишем это уравнение в виде:

$$GdV=cds; \tag{44}$$

Поскольку $I(\Phi)=ds^2=dU^2+G(U)dV^2$, то $ds=\sqrt{dU^2+G(U)dV^2}$

Тогда уравнение (44) перепишется в виде:

$$G(U)\,dV = c\sqrt{dU^2 + G(U)\,dV^2};$$

$$G^2(U)\,dV^2 = c^2\left(dU^2 + G(U)\,dV^2\right);$$

$$G(U)\left[G(U) - c\right]dV^2 = c^2\,dU^2;$$

$$dV^2 = \frac{c\,dU^2}{G(U)\left[G(U) - c\right]};$$

Извлекая квадратный корень, получим:

$$dV = \pm\sqrt{\frac{c}{G(U)\left[G(U) - c\right]}}\,dU; \qquad (45)$$

Уравнение (45) можно проинтегрировать в квадратурах:

$$V = \pm\sqrt{c}\int \frac{dU}{G(U)\left[G(U) - c\right]}; \qquad (46)$$

Из (45) имеем:

$$\frac{dV}{ds} = \pm\sqrt{\frac{c}{G(U)\left[G(U) - c\right]}}\cdot\frac{dU}{ds}; \qquad (47)$$

Подставив (47) в уравнение системы (40), получим:

$$\frac{d^2U}{ds^2} - G_u\cdot\frac{c}{G(U)\left[G(U) - c\right]}\cdot\left(\frac{dU}{ds}\right)^2 = 0.$$

$$\left(\left(G^2(U) - cG(U)\right)\frac{d^2U}{ds^2} - c\,G_u\cdot\left(\frac{dU}{ds}\right)^2 = 0\right.$$

$$G^2(U)\frac{d^2U}{ds^2} = c\left[G(U)\frac{d^2U}{ds^2} + G_u\left(\frac{dU}{ds}\right)^2\right] = c\cdot\frac{d}{ds}\left(G(U)\frac{dU}{ds}\right); \qquad (48)$$

Обозначим $t(s) = G(U)\frac{dU}{ds}$. Тогда $\frac{dU}{ds} = \frac{t(s)}{G(U)}$. Следовательно,

$$\frac{d^2U}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{t(s)}{G(U)}\right) = \frac{G(U)\frac{dt}{ds} - t(s)\frac{dU}{ds}}{G^2(U)}; \qquad (49)$$

Из (48), (49) получим: $G(U)\frac{dt}{ds} - t(s)G_u\frac{dU}{ds} = c\frac{dt}{ds}$. Отсюда

$$\left(G(U) - c\right)\frac{dt}{ds} - t(s)G_u\frac{dU}{ds} = 0; \qquad (50)$$

Разделим обе части равенства (50) на $\left(G(U) - c\right)^2$. Получим:

$$\frac{\left(G(U) - c\right)\frac{dt}{ds} - t\frac{d}{ds}\left(G(U) - c\right)}{\left(G(U) - c\right)^2} = 0,$$

то есть

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{t}{G(U)-c}\right)=0; \tag{51}$$

Интегрируя (51), получаем:

$$\frac{t}{G(U)-c}=c_1, \tag{52}$$

где $c_1=const$.

Отсюда $G(U)\frac{dU}{ds}=c_1(G(U)-c)$ или

$$c_1 ds=\frac{G(U)}{G(U)-c}dU; \tag{53}$$

Поскольку (53) является уравнением с разделяющимися переменными, то, интегрируя, получим:

$$c_1 s=\int \frac{G(U)dU}{G(U)-c}+c_2; \tag{54}$$

Для каждой конкретной функции $G(U)$ из этого выражения можно найти функцию $U=U(s)$. Подставляем эту функцию в (47), найдем $V=V(s)$, то есть внутреннее параметрическое уравнение геодезической линии.

Итак, уравнение (46) описывает все геодезические линии поверхности вращения.

Теорема 4. *Меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.*

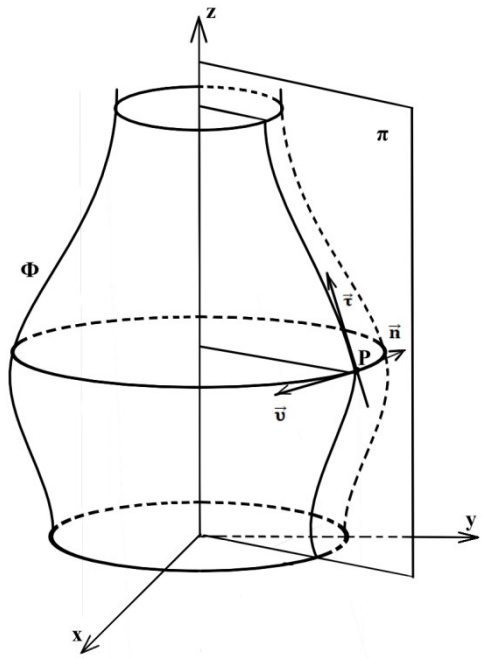


Рис. 7:

Доказательство. Пусть Φ поверхность вращения; Oz - это ось вращения; γ - меридиан, проходящий через точку $P \in \Phi$. Пусть π плоскость, проходящая через ось вращения и точку P.

Так как $\gamma \in \pi$, то единичный касательный вектор $\vec{\tau}$ к кривой γ в точке P, вектор главной нормали $\vec{\nu}$ в точке P и вектор нормали $\vec{n}$ поверхности в точке P параллельны плоскости π.

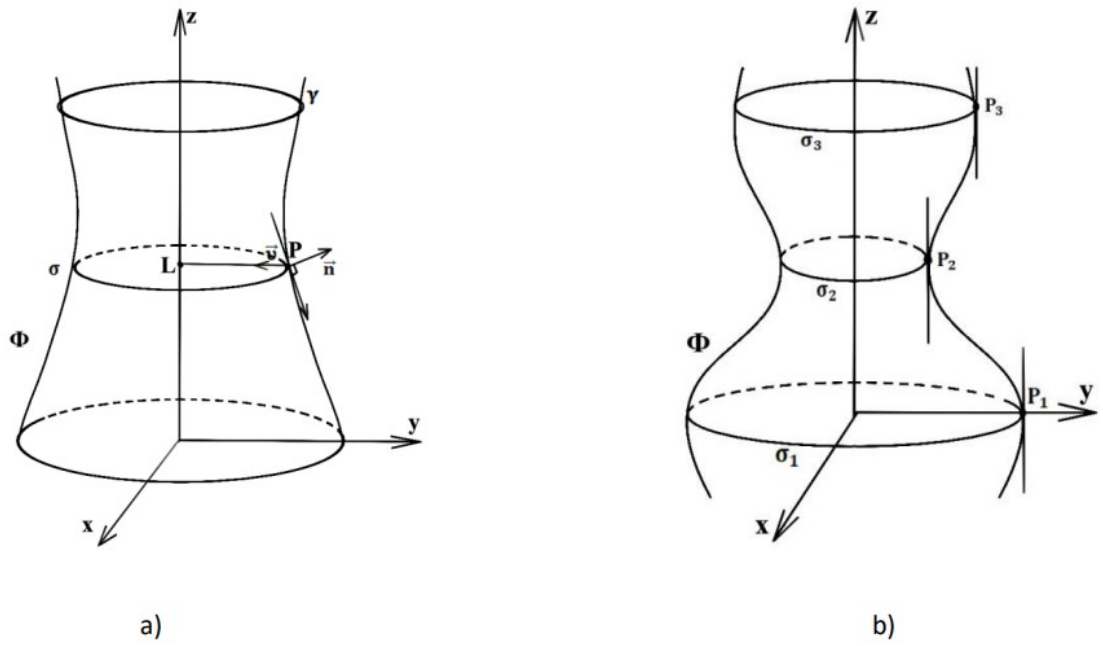
Причем $\vec{\nu} \perp \vec{\tau}$, следовательно, вектор главной нормали коллинеарен вектору нормали $\vec{n}$ поверхности (см. рис. 7). Тогда меридиан γ - геодезическая линия.

Теорема 5. *Параллель поверхности вращения является геодезической линией тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в ее точках параллельна оси вращения.*

Доказательство. Пусть Φ поверхность вращения; Пусть Oz ось вращения; $P \in \Phi, ; \gamma$ - меридиан, σ - параллель, проходящая через точку P.

Параллель σ представляет собой окружность с центром в точке L. Следовательно, вектор главной нормали кривой σ параллелен прямой LP, которая перпендикулярна оси Oz.

Рис. 8:



a) b)

Вектор нормали к поверхности Φ перпендикулярен $T_P(\Phi)$, а отсюда $\vec{n} \perp \vec{\gamma}(t_0)$, где $\vec{\gamma}(t_0)$ касательный вектор к меридиану γ в точке $P=\vec{\gamma}(t_0)$. Параллель будет геодезической линией тогда и только тогда, когда $\vec{v} \parallel \vec{n}$, а это возможно, когда $\vec{v} \perp \vec{\gamma}(t_0)$ тогда и только тогда, когда $\vec{\gamma}(t_0) \parallel Oz$. Такая ситуация возможна, если Φ будет иметь вид как показано на рисунке 8 (b).

Теорема 6. *(Теорема Клеро) На поверхности вращения Φ вдоль любой геодезической линии выполняется: $\rho \cos\mu = c$, где ρ- это расстояние точки геодезической линии от оси вращения, μ- угол между параллелью и геодезической, c - число, постоянное для геодезической.*

Доказательство. Пусть есть поверхность вращения Φ. Oz - ось вращения. Зафиксируем на z точку Q.

Возьмем на поверхности Φ некоторую геодезическую линию γ, заданную вектор-функцией $\vec{r}=\vec{r}(s)$, s - натуральный аргумент (см. рис. 9). Разложим ее на две составляющие $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{r}_2$, где $\vec{r}_1$ параллельна оси Oz, $\vec{r}_2$ перпендикулярна оси Oz.

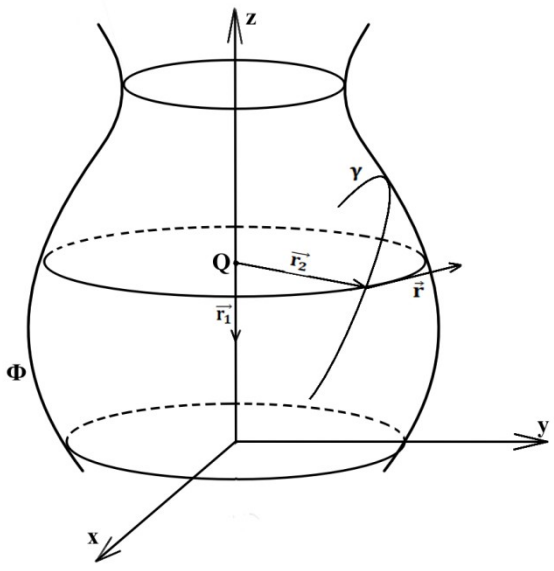


Рис. 9:

Орт касательной к параллели $\vec{\tau}$ ортогонален к $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Отсюда следует, что $\vec{\tau}$ коллинеарен векторному произведению $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$. А поскольку $|\vec{\tau}|=|\vec{r}_2'|=1$, то $\vec{r}^{\,\prime 2}=1$.

Дифференцируя данное равенство, получим, $2\vec{r}_2' \cdot \vec{r}_2''=0$. Отсюда следует, что $\vec{r}_2' \perp \vec{r}_2''$.

Так как мы задали натуральную параметризацию $|\vec{r}|=1$ тогда и только тогда, когда $\vec{r}' \perp \vec{r}''$. Кроме того, $\vec{r}''$ ортогональна всей касательной плоскости, а это вектор из касательной плоскости к поверхности, то есть $\vec{r}'' \perp [\vec{r}_1, \vec{r}_2]$.

Исходя из всего выше сказанного, напишем, что же такое

$$\rho \cos \mu = \frac{|\vec{r}_2|\left(\vec{r}', [\vec{r}_1, \vec{r}_2]\right)}{|[\vec{r}_1, \vec{r}_2]|} = \left(\vec{r}', \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, \vec{r}_2\right)$$

Дифференцируем

$$\rho \cos \mu = \left(\vec{r}', \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, \vec{r}_2\right) + \left(\vec{r}', \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}\right)', \vec{r}_2\right) + \left(\vec{r}', \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, \vec{r}_2'\right) + \left(\vec{r}_2', \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, \vec{r}_2'\right) = 0$$

Следовательно, $\rho \cos \mu = c$, где $c = const$.

.

§4. Поведение геодезических на некоторых поверхностях вращения.

В этом параграфе мы посмотрим как ведут себя геодезические линии на некоторых видах поверхности вращения, а именно: на эллипсоиде и однополосном гиперболоиде вращения.

Рассмотрим эллипсоид вращения Φ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, причем $a \neq c$.

Пусть $r_0 = a$ - радиус самой широкой параллели γ_0 эллипсоида вращения Φ, точка $P_0 \in \gamma_0$.

Рассмотрим геодезическую линию γ, проходящую через точку P_0 под углом $\mu_0 = 0$ параллели γ_0. Тогда по теореме Клеро: $\rho \cos\mu = a$. Следовательно, $\rho = a$, $\cos\mu = 1$.

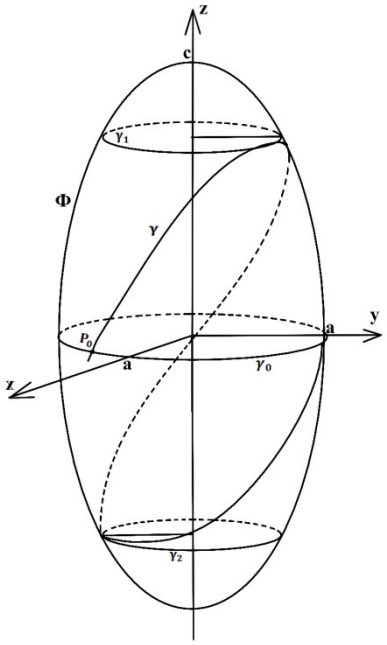


Рис. 10: Поведение геодезических на эллипсоиде вращения

Таким образом, получаем, что геодезическая линия совпадает с параллелью γ_0.

Рассмотрим случай, когда геодезическая пересекает параллель γ_0 под прямым углом, то есть $\mu_0 = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, по теореме Клеро мы получим, что

$\rho\cos\mu=0$. Это возможно в том случае, когда $\cos\mu=0$ тогда и только тогда, когда $\mu=\frac{\pi}{2}$. Из этого делаем вывод, геодезическая линия совпадает с меридианом.

Теперь, пусть $0<\mu_0<\frac{\pi}{2}$. Обозначим $a\cos\mu_0=c_0$. Тогда вдоль геодезической $\rho\cos\mu=c_0$, где $c_0\in(0;a)$. Так как при $\mu\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y=\cos\mu$ убывает, то $\mu<\mu_0$. Следовательно, угол μ между линией γ и параллелью γ_0 уменьшается при движении вверх вдоль γ. Из всего выше сказанного получаем, что линия γ пересекает все параллели $r<c_0$ эллипсоида под углом $\mu_0\neq0$, далее, касаясь параллели γ_1 с $\rho=c_0$, снова уходит в сторону γ_0.

Рассмотрим геодезические на однополостном гиперболоиде вращения.

Пусть Φ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - однополостной гиперболоид вращения. Пусть точка $P_0=(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $P_0\in\Phi$, $z_0<0$, $x_0^2+y_0^2=r_0^2>a^2$.

Опишем поведение геодезических линий, проходящих через точку P_0. По теореме Клеро, на любой геодезической линии выполняется равенство:

$$\rho\cos\mu=r_0\cos\mu_0=c_0; \qquad (55)$$

где ρ - расстояние от точки $P_0\in\Phi$ до оси вращения, μ - угол между γ и параллелью в точке P_0, $c_0=const$.

В случае, когда $\mu_0=\frac{\pi}{2}$, геодезическая линия является меридианом, проходящим через точку P_0.

Рассмотрим геодезическую линию γ. Пусть $c_0\in(0;a)$ и $\mu\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Двигаясь по линии γ вверх из точки P_0, можно заметить, что расстояние ρ и угол μ уменьшаются. Наименьший угол $\mu=\mu_1$, достигается при $\rho=a$.

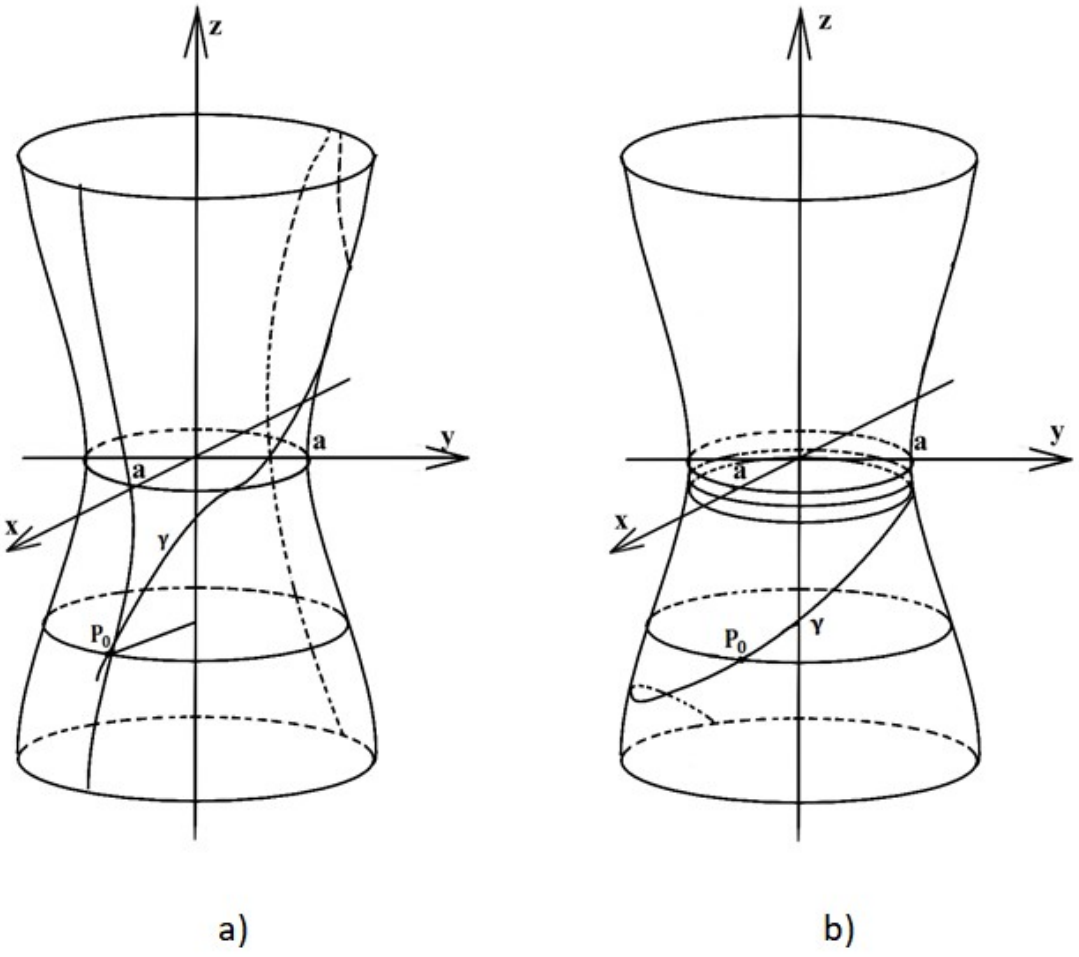
$$\rho\cos\mu=c_0\ \Rightarrow\ a\cos\mu_1=c_0\ \Rightarrow\ \cos\mu_1=\frac{c_0}{a0}\ \Rightarrow\ \mu_1=\arccos\frac{c_0}{a},$$

то есть линия γ пересекает параллель радиуса a под углом $\mu_1=\arccos\frac{c_0}{a}$. Далее линия попадает в верхнюю часть гиперболоида, где происходит пересечение с параллелью γ_1 радиуса r, под углом $\mu_0=\arccos\frac{c_0}{r_0}$.

Итак, обе параллели $\gamma_1(z>0)$ и $\gamma_2(z<0)$ радиуса r, пересекаются линией γ под одним и тем же углом μ_r для любого $r \in (a;\ +\infty)$.

Если расстояние будет стремиться к $+\infty$, то $\cos\mu$ стремиться к $+0$, следовательно, μ стремится к $\frac{\pi}{2}$. Из этого делаем вывод, что геодезическая линия будет неограниченно приближаться к некоторому меридиану.

Рис. 11:



a) b)

Пусть $c_0 = a$, тогда $\mu_0 = a$ и $\mu_0 = \arccos\frac{c_0}{r_0}$. Проводя рассуждения так же как и в предыдущем случае, мы видим, что происходит движение вверх благодаря форме гиперболоида. При этом происходит уменьшение расстояния до оси вращения, по этому, в силу (55) уменьшается и угол между геодезической и соответствующей параллелью.

Предположим, что геодезическая пересекает параллель радиуса a в точке P_0. Тогда угол между ними будет равен нулю. В силу свойства поверхностей вращения параллель будет являться геодезической линией.

Мы получили, что через точку P_0 одновременно проходят две геодезические линии, причем в одном направлении. Однако это противоречит тому, что параллель поверхности вращения является геодезической линией тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в точке, параллельна оси вращения. Из этого следует, что геодезическая линия максимально приближается к параллели, но никогда ее не пересекает. То есть мы всегда остаемся в нижней части гиперболоида (см. рис. 11 (b)).

§5. Обобщения поверхности вращения.

Любую поверхность вращения можно представить как поверхность, образованную движением окружности переменного радиуса, проходящим так, что центр окружности перемещается по заданной прямой, а плоскость окружности остаётся всё время перпендикулярна к прямой l (см. рис. 12).

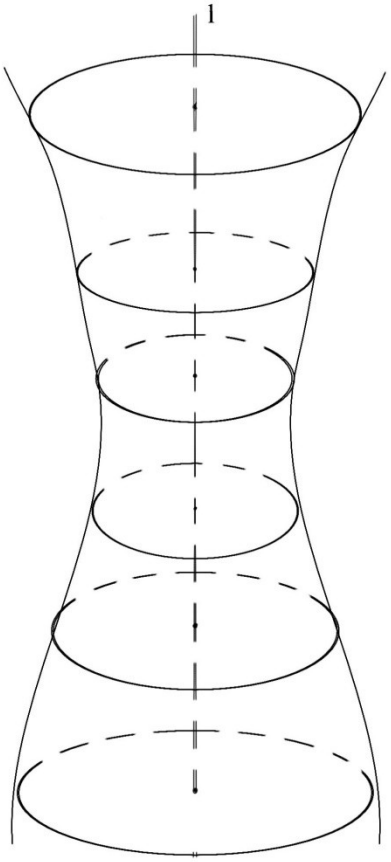


Рис. 12:

Обобщением поверхности вращения являются каналовые поверхности.

Определение 1. Каналовыми называются поверхности, которые образуются движением окружности переменного радиуса, проходящим так, что центр окружности перемещается по заданной линии γ, а плоскость окружности остаётся перпендикулярной к линий l (см. рис. 13)

Каналовая поверхность становится поверхностью вращения, если γ - прямая линия.

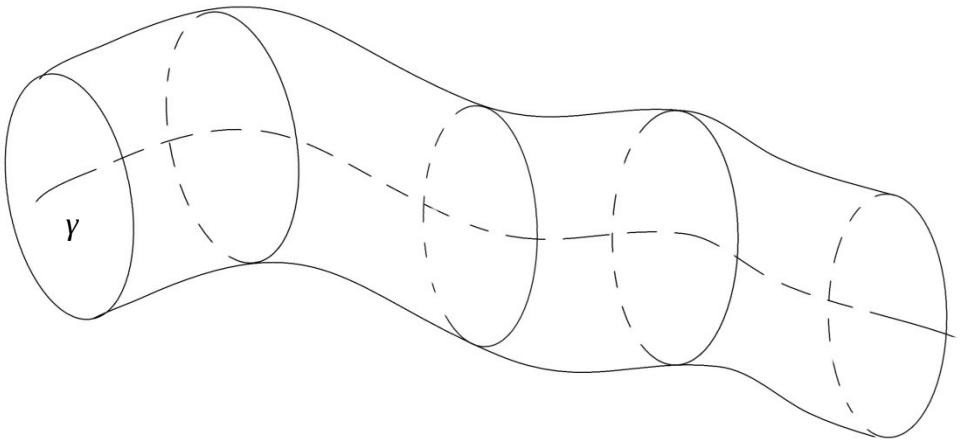


Рис. 13:

Если радиус движущейся окружности остаётся постоянным, то такая каналовая поверхность называется трубчатой (см. рис. 14).

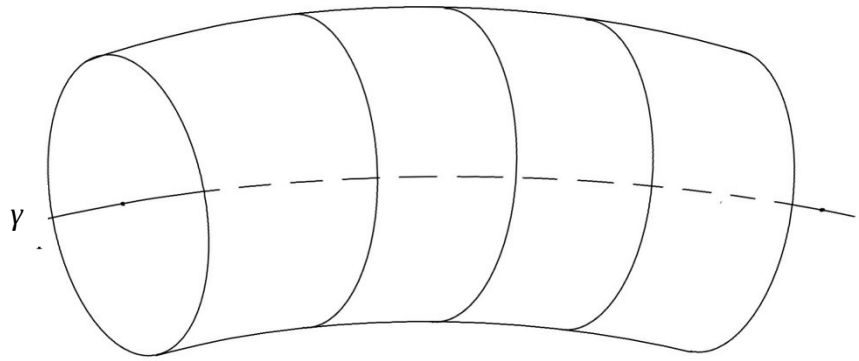


Рис. 14:

Примером трубчатой поверхности с прямолинейной осью γ служит цилиндр (см. рис. 15).

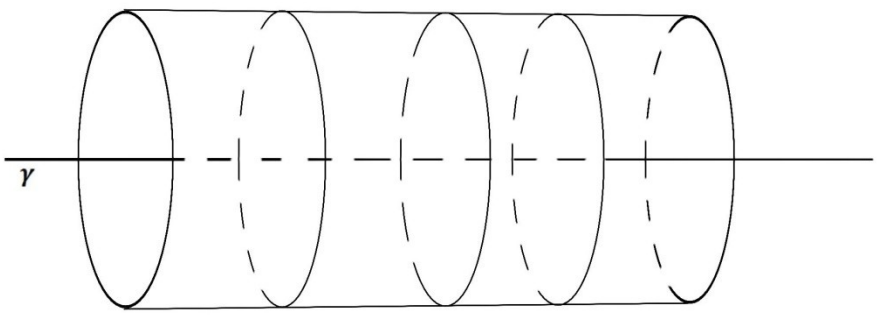


Рис. 15:

Ещё одним обобщением поверхности вращения являются поверхности,

называемые циклидами. Впервые такие поверхности исследовал Дюпен. Дюпен доказал, что циклида может быть получена следующим образом: имеется три произвольных сферы. Существует бесконечно много других сфер, касающихся этих трёх сфер. Огибающая этого семейства сфер и есть циклида (см. рис. 16).

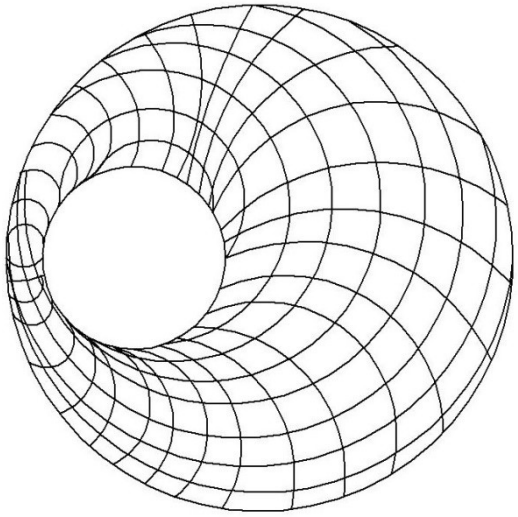


Рис. 16:

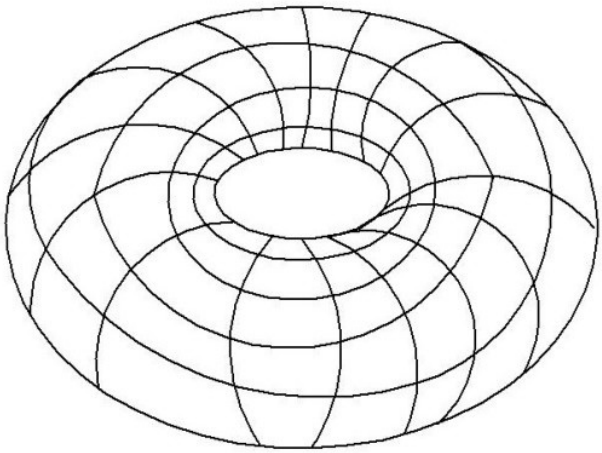


Рис.17:

В зависимости от того, как расположены первоначально выбранные три сферы получаются различные типы циклид. Одним из частных видов циклиды является тор (см. рис. 17).

Заключение

Поверхности вращения широко используются в технике, машиностроении, быту, строительстве, архитектуре, прикладном искусстве, а также в преподавании геометрии в школе и в вузе. Такое широкое применение поверхностей вращения объясняется простотой их формообразования: многие из них обрабатываются на станках при относительном вращательном движении режущего или формирующего инструмента и изделия.

Многие изделия представляют собой тела вращения: шарики в шарикоподшипниках, оси, валы резьбовые детали, шайбы, штифты, пробки, фрезы-шарошки, круглые фасонные напильники, абразивные фасонные головки. Многие конструктивные элементы технических деталей ограничены поверхностями вращения: буртики, гнезда, отверстия, проточки, фаски.

В технике широко применяются линейчатые поверхности вращения. Например, в строительной технике часто используют однополостный гиперболоид вращения, имеющий два семейства прямолинейных образующих. Корпуса многих космических кораблей имеют форму поверхностей вращения. Звукоулавливатели, радиотелескопы, прожектора и фары автомобилей имеют форму параболоидов вращения.

В настоящее время поверхность вращения, изучается и применяется инженерами-конструкторами, художниками-прикладниками, архитекторами, строителями, физиками, астрономами и многими другими специалистами.

В дипломной работе представлены основные факты и доказаны теоремы, описывающие свойства поверхностей вращения. А именно: в первом параграфе описаны их основные характеристики; параграф два посвящен изучению омбилических точек поверхности вращения с использованием индикатрисы Дюпена; в третьем и четвертом параграфах изучены все замечательные линии поверхности (асимптотические линии, линии кривизны и геодезические линии); пятый параграф содержит информацию о существующих обобщениях поверхностей вращения.

Список используемых источников

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М.: АСТ: Астрель, 2021. 703с.
2. Дарбу Ж.Г. Лекции по общей теории поверхностей и геометрические приложения анализа бесконечно малых. Т. I. Общие понятия. Криволинейные координаты. Минимальные поверхности. -М. - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 620с.
3. Дарбу Ж.Г. Лекции по общей теории поверхностей и геометрические приложения анализа бесконечно малых: в 4-х томах. ТОМ 3: Геодезические линии и геодезическая кривизна. Дифференциальные параметры. Изгибание поверхности. Т.3. - М. - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 516с.
4. Джусти Э. Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Изд-во «Мир» 1989. 240 с.
5. Егоров Д.Ф. Дифференциальная геометрия. Изд. 2-е. М.: Изд-во URSS. 2022. 304с.
6. Жукова Н.И., Багаев А.В. Геодезические линии на поверхностях: Учеб. пособие. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2008. 54с.
7. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых в евклидовом пространстве: Учеб. Пособие - Казань: Изд-во Казанский университет, 2013. 204с.
8. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч.2: Поверхности в пространстве. Отображения и изгибания поверхностей. Специальные вопросы. Изд. 2-е. - М.:ЛЕНАНД, 2021. 408с.
9. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. Изд. 3-е. М.: Изд-во ФИЗМАТГИЗ, 2019. 248с.
10. Норден А.П. Теория поверхностей. Изд. 2-е. М.: Изд-во Гостехиздат.,

2019. 264с.

11. Оссерман Р. Минимальные поверхности. М.: Изд-во Физматлит, 2020. 352с.

12. Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969. 760с.

13. Погорелов, А. В.Дифференциальная геометрия. Изд. 7-е. М.: Изд-во URSS, 2022. 184с.

14. Поздняк Э.Г. Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 2003. 408с.

15. Розендорн Э.Р. Теория поверхностей. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Изд-во Физматлит, 2006. 304с.

16. Топоногов В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. М.: Изд-во: Физматкнига, 2012. 224с.

17. Фиников С.П. Курс дифференциальной геометрии. Изд. 4-е. М.: КомКнига, 2013. 344с.

18. Фиников С.П. Теория поверхностей. Изд. 4-е, перераб., испр. М.: Либроком, 2018. 304с.

19. Шарипов Р.А. Курс дифференциальной геометрии: учебное пособие для вузов: Издание Башкирского университета. - Уфа, 1996. 211с.

20. Thomas F. Banchoff, Stephen T.Lovett Differential Geometry of Curves and Surfaces: Publisher CRC Press, 2016 yr. 430p.